This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Library
of the
University of Wisconsin

Über die

Festigkeit veränderlich elastischer Konstruktionen,

insbesondere von

Eisenbeton-Bauten.

Ein Beitrag zur Erforschung der inneren Kräfte und Deformationen sowie zum Gebrauch bei der Berechnung und Ausführung armierter Betonbalken, -Stützen und -Gewölbe.

Von

Ingenieur **Dr. Rudolf Saliger,**

Oberlehrer a. d. Kgl. Baugewerkschule Cassel.

Mit 63 Textabbildungen und 5 Tafeln in Photolithographie.

Leipzig,
Baumgärtner's Buchhandlung.
1904.

94414
MAR 13 1906

SDKC
.SA3

61333346

Vorwort.

Das vorliegende Büchlein verdankt sein Entstehen der Dissertation, welche der Verfasser im Januar 1903 behufs Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften an der Wiener Hochschule eingereicht hatte. Mancherlei daraus mußte — der raschen Entwicklung der Beton-Eisen-Theorie gemäß — als veraltet weggelassen, Vieles entsprechend den Fortschritten hinzugefügt werden. Wenn dennoch unrichtige Ansichten Platz gefunden haben sollten, so mögen die Fachgenossen nicht zu streng richten. Selbst während des Druckes ist eine große Zahl neuer Gesichtspunkte in den Zeitschriften veröffentlicht worden, während gleichzeitig andere als nicht mehr haltbar aufgegeben werden mußten.

Um dem Büchlein nicht theoretisches Interesse allein zu sichern, sondern es auch für die Praxis brauchbar zu machen, haben neben der allgemeinen Behandlung der Materie vereinfachte Rechnungsweisen, sowie die vom Betonausschuß des deutschen Betonvereins und des Verbandes deutscher Architekten und Ingenieur-Vereine aufgestellten Leitsätze Berücksichtigung erfahren. Auch ist ein Auszug aus den Bestimmungen des preußischen Ministers der öffentlichen Arbeiten über Eisenbetonbauten bei Hochbauten angefügt. Das Tabellenmaterial im VI. Abschnitt wird manchem Praktiker des Eisenbetonbaues eine angenehme Hilfe bieten, da es den Gebrauch von Formeln fast ganz überflüssig macht.

Sollte es dem Verfasser gelungen sein, die Kenntnisse über das Wirken der Kräfte in veränderlich elastischen Konstruktionen und insbesondere solchen aus Eisenbeton zu mehren, dann ist der Zweck des Werkchens erfüllt. In diesem Sinne möge es der immer wachsenden Bedeutung des modernen Betonbaues dienen.

Cassel, im Juni 1904.

Dr. Ing. **Saliger,**
Oberlehrer.

Inhaltsangabe.

Einleitung 1

I. Abschnitt. Wirkungen der Biegungsmomente 1

A. Spannungen in einfachen Körpern 3

a) Analytische Ermittlung der Spannungsverteilung nach dem Formänderungsgesetze $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$. Abs. 3—5 3

b) Graphische Ermittlung der Spannungsverteilung. Abs. 6—13 . 6

B. Spannungen und Deformationen der Verbundkörper 12

a) Voraussetzungen, Grundlagen und Erfahrungen. Abs. 14—19 . 12

b) Graphische Ermittlung der Biegungsspannungen und deren Momente. Abs. 20—26 19

c) Ideelle Spannung, Querschnitte etc. Abs. 27—34 27

d) Erläuterung der Tafelfiguren 4—11, Ergebnisse daraus und Anwendungen. Abs. 35 und 36 33

e) Formeln zur Bestimmung der Spannungen und der Abmessungen armierter Balken. Abs. 37—49 37

f) Ermittlung der Biegungslinie. Abs. 50 und 51 61

g) Untersuchung einer Hennebique-Decke. Abs. 52—62 64

II. Abschnitt. Einflüsse von Biegungsmomenten und Normalkräften . . 81

a) Spannungen. Abs. 64—66 81

b) Durchbiegungen. Abs. 67 und 68 87

c) Näherungsberechnung exzentrisch gedrückter Eisenbetonstäbe. Abs. 69 und 70 91

III. Abschnitt. Spannungen in armierten Druckstäben 94

a) Reiner Druck. Abs. 71—73 94

b) Knickung. Abs. 74—76 98

IV. Abschnitt. Spannungen aus Querkräften (Schubspannungen). Abs. 77—81 103

V. Abschnitt. Eigenspannungen des armierten Betons 109

a) Symmetrisch armierte Querschnitte. Abs. 82—87 109

b) Unsymmetrisch armierte Betonkörper. Abs. 88—91 118

Anhang. Äußerlich statisch unbestimmte Konstruktionen. Abs. 92 . . . 123

VI. Abschnitt. Tabellen und Vorschriften 125

a) Tabelle zur Berechnung armierter Steinbalken 125

b) Tabelle zur Dimensionierung von Plattenbalken aus Eisenbeton . 131

c) Tabelle zur Berechnung von Eisenbetonsäulen 131

d) Auszug aus den Bestimmungen für Eisenbeton bei Hochbauten . 132

Einleitung.

1. Formänderungen und Gleichgewicht der Kräfte.

Alle Stoffe erleiden unter dem Einfluß äußerer Kräfte Veränderungen ihrer Gestalt; sie sind eine Folge der Molekülverschiebungen, die durch Temperaturänderungen, durch mechanische Einflüsse oder durch beide hervorgerufen werden können.

Wirken auf einen Körper von außen Kräfte ein, so entstehen im Innern desselben Gegenkräfte, die jenen das Gleichgewicht halten. Zerschneidet man einen stabförmigen Gegenstand und nimmt den einen Teil desselben weg, so müssen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes auf die Schnittfläche Kräfte wirken, deren Einfluß den an dem abgeschnittenen Teil angreifenden äußern Kräften M, N und Q (Moment, Normal- und Querkraft) gleich ist. — Die äußeren Kräfte sind für sich im Gleichgewicht, wenn die Summe aller wagrechten Kräfte, die Summe aller lotrechten Kräfte sowie die Summe aller Biegungsmomente Null ist. Ferner müssen die inneren Kräfte einer Schnittfläche und die auf den weggedachten Stabteil wirkenden äußeren Kräfte M, N und Q unter denselben Bedingungen im Gleichgewicht stehen. Hierbei ist vorausgesetzt, daß sämtliche Kräfte in einer Ebene wirken, in welcher auch die Stabachse liegt. Die inneren Kräfte (Spannungen) verteilen sich nach bestimmten, teilweise jedoch noch unerforschten Gesetzen über dem Querschnitt. Die Spannungen, welche hier untersucht werden sollen, sind Ergebnisse der Biegungsmomente, Normal- und Querkräfte sowie von Einflüssen, die im Wesen des Stoffes liegen und daher von den äußeren Kräften unabhängig sind. (Eigenspannungen.)

I. Abschnitt.

Wirkungen der Biegungsmomente.

2. Allgemeines über die Verteilung der inneren Kräfte.

Ein stabförmiger Körper vollzieht unter dem Einfluß eines Moments eine Gestaltveränderung, welche Biegung heißt. Sie entsteht durch Verdrehung zweier Nachbarquerschnitte um in diesen liegende Achsen. Wir

nehmen an, daß die Querschnitte, welche vor dem Momenteneinfluß eben waren, auch nach der Verdrehung eben bleiben. (Naviersche Biegungshypothese, für gerade Stäbe mit verhältnismäßig kleinen Querschnittsabmessungen von älteren Autoren, darunter von Pochhammer, Gleichgewicht des elastischen Stabes, Kiel 1879, nachgewiesen). Daraus folgt, daß die Längenänderungen der Fasern ihren Abständen von der Querschnittsdrehachse proportional sind. Verkürzungen (Stauchungen) und Verlängerungen (Dehnungen) werden durch Druck- bezw. Zugkräfte erzeugt. Kennen wir daher die Beziehung zwischen der Längenänderung ε und der dazu gehörigen Kraft σ für die Länge und den Querschnitt 1, so läßt sich die Verteilung der Innenkräfte über dem Querschnitt ermitteln.

Die Funktion $f(\sigma, \varepsilon)$ kann nicht durch mathematische oder philosophische Deduktionen, sondern nur auf dem Wege des Versuches, der Erprobung jedes einzelnen Stoffes, gewonnen werden. Doch auch diese Ergebnisse sind nur relative Wahrheit, weil kein Experiment von Umständen und Voraussetzungen völlig losgelöst werden kann.

Früher huldigte man fast allgemein der Anschauung, daß Längenänderung und Kraft in geradem Verhältnis zueinander stehen (Hookesches Gesetz). Innerhalb gewisser Grenzen läßt sich die Beziehung $f(\sigma, \varepsilon)$ für viele Baustoffe (nach Schüle, Bach und älteren Autoren) durch die Gleichung ausdrücken:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m.$$

Hierin bedeutet ε die Längenänderung der Längeneinheit (spezifische Längenänderung), σ die Spannung der Flächeneinheit. α und m sind Erfahrungszahlen. Setzt man $\sigma = 1$, so wird $\varepsilon = \alpha$, d. h. α ist die Längenänderung der Längeneinheit bei der Spannung 1. α heißt daher auch die Elastizitätsziffer, weil sie ein Maß der Stoffelastizität bei Beginn der Spannung gibt. Das Verhältnis der gesamten Längenänderungen zu den bleibenden, nach Aufhören der Spannung nicht verschwindenden, stellt den Elastizitätsgrad vor (nach Bach). Ist das Verhältnis unendlich, dann wird der Stoff als vollkommen elastisch bezeichnet. Alle für den Ingenieur in Betracht kommenden Materialien sind mehr oder weniger unvollkommen elastisch.

Das Elastizitätsmaß α', oder kurz die Elastizität, ist mit den Spannungen veränderlich. Es läßt sich durch das Verhältnis der unterschiedlichen Längenänderung zur Spannungsänderung ausdrücken:

$$\alpha' = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = m \cdot \alpha \cdot \sigma^{m-1}.$$

In der Literatur wird meistens der Elastizitätsmodul $E = \frac{1}{\alpha'}$ benutzt. — Derselbe ist daher der 1. Differentialquotient der Spannung nach der Längenänderung.

Mehrere Forscher haben die Koeffizienten α und m für eine große Anzahl von Stoffen ermittelt. Für einige, z. B. Schmiedeeisen, Stahl ist innerhalb gewisser Grenzen (Proportionalitätsgrenze) angenähert $m = 1$. Es gibt aber auch Stoffe, die dem Gesetze $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$ nicht folgen. Manchmal gibt eine Parabel- oder Hyperbellinie eine gute Beziehung zwischen ε und σ. In diesen Fällen können die Elastizitätsmaße α' durch gerade Linien dargestellt werden.

A. Spannungen in einfachen Körpern.

a) Analytische Ermittlung der Spannungsverteilung nach dem Formänderungsgesetze $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma^m$.

3. Beziehungen zwischen Rand- und Innenspannungen.

Ein Querschnitt QQ' (Fig. 1) verdreht sich gegen die ursprüngliche Lage um den Winkel φ in die Lage $Q_1 Q_1'$. Für den Druckteil OQ soll gelten $\varepsilon_1 = \alpha_1 \cdot \sigma_1^{m_1}$, (I.)

für den Zugteil ist

$$\varepsilon_2 = \alpha_2 \cdot \sigma_2^{m_2}. \quad \text{(II.)}$$

Im Abstande y_1 bezw. y_2 von der Verdrehachse sind die Längenänderungen ε_1 und ε_2

$$\varepsilon_1 = y_1 \cdot \varphi \text{ und } \varepsilon_2 = y_2 \cdot \varphi.$$

Es ist also

$$y_1 \cdot \varphi = \alpha_1 \cdot \sigma_1^{m_1} \text{ und}$$
$$y_2 \cdot \varphi = \alpha_2 \cdot \sigma_2^{m_2}. \quad \text{(1.)}$$

Hieraus ergibt sich

$$\sigma_1 = \left(\frac{y_1 \cdot \varphi}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \text{ und}$$
$$\sigma_2 = \left(\frac{y_2 \cdot \varphi}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}. \quad \text{(2.)}$$

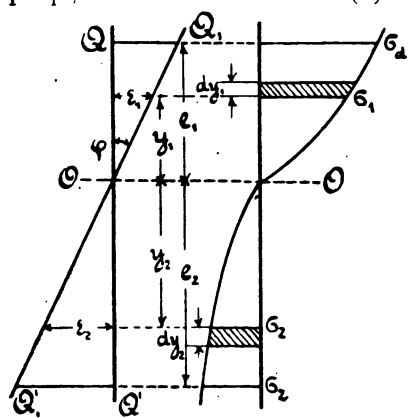


Fig. 1.

Setzt man für $y_1 = e_1$ und $y_2 = e_2$, so erhält man die Randspannungen:

$$\sigma_d = \left(\frac{e_1 \cdot \varphi}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \text{ und } \sigma_z = \left(\frac{e_2 \cdot \varphi}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}.$$

Sonach $\varphi = \frac{\sigma_d^m \cdot \alpha_1}{e_1}$; φ in Gl. (2.) eingesetzt, liefert

$$\sigma_1 = \sigma_d \left(\frac{y_1}{e_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \text{ und analog } \sigma_2 = \sigma_z \left(\frac{y_2}{e_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}. \quad \text{(3.)}$$

Durch Division der Gl. (1.) erhält man

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\sigma_1^{m_1}}{\sigma_2^{m_2}}$. Für die äußern Fasern ist das Verhältnis

$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\sigma_d^{m_1}}{\sigma_x^{m_2}}$. Hieraus rechnet sich

$$\sigma_x = \left(\frac{\alpha_1 \cdot e_2}{\alpha_2 \cdot e_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \cdot \sigma_d^{\frac{m_1}{m_2}}. \qquad (4.)$$

Substituieren wir den Wert (4.) in (3.), so ist

$$\sigma_2 = \left(\frac{y_2 \cdot \alpha_1}{e_1 \cdot \alpha_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \cdot \sigma_d^{\frac{m_1}{m_2}}. \qquad (5.)$$

In ähnlicher Weise lassen sich die Spannungen σ_1 und σ_2 durch σ_x ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{y_1 \cdot \alpha_2}{e_2 \cdot \alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \cdot \sigma_x^{\frac{m_2}{m_1}} \\ \sigma_2 &= \left(\frac{y_2}{e_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \cdot \sigma_x \end{aligned}\right\} \qquad (6.)$$

4. Bestimmung der spannungslosen Faser.

Wirken nur Momente ein, so ist die Summe aller inneren Horizontalkräfte Null, also

$$\int_0^{e_1} \sigma_1 \, dy_1 \cdot x_1 = \int_0^{e_2} \sigma_2 \cdot dy_2 \cdot x_2.$$

Hierin bedeuten x_1 und x_2 die Querschnittsbreiten im Abstande y_1 bezw. y_2.

Betrachten wir einen rechteckigen Querschnitt von der Breite B, so wird

$$\int_0^{e_1} \sigma_1 \cdot dy_1 = \int_0^{e_2} \sigma_2 \cdot dy_2. \qquad (7.)$$

Die Werte aus Gl. (6.) in (7.) eingesetzt, ergibt:

$$\int_0^{e_1} \left(\frac{\alpha_2}{e_2 \cdot \alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \cdot \sigma_x^{\frac{m_2}{m_1}} \cdot y_1^{\frac{1}{m_1}} \cdot dy_1 = \int_0^{e_2} \left(\frac{1}{e_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \sigma_x \cdot y_2^{\frac{1}{m_2}} \cdot dy_2.$$

Hieraus ist nach der Integration

$$\frac{e_2}{e_1} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1+1}} \cdot \left[\frac{m_1 (m_2 + 1)}{m_2 (m_1 + 1)}\right]^{\frac{m_1}{m_1+1}} \cdot \sigma_x^{\frac{m_2 - m_1}{m_1+1}}. \qquad (8.)$$

Die Lage der spannungslosen Faserschichte oder der Nullinie ist durch Gl. (8.) bestimmt. Sie hängt vom Formänderungsgesetze und von den Spannungen in den äußersten Fasern ab.

Beispiele.

1. Wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ und $m_1 = m_2 = 1$, ist $e_1 = e_2$ (konstant elastisches Material).

2. In einem Gußeisenbalken mit rechteckigem Querschnitt, für welchen (nach Bach) z. B. die Beziehungen

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1124000} \cdot \sigma_1^{1,048} \text{ und } \varepsilon_2 = \frac{1}{1150000} \cdot \sigma_2^{1,1},$$

demnach $\alpha_1 = \frac{1}{1124000}$, $\alpha_2 = \frac{1}{1150000}$, $m_1 = 1{,}048$, $m_2 = 1{,}1$ gelten, ist die Lage der Nullinie bestimmt durch:

$$\log \frac{e_2}{e_1} = -0{,}01033 + 0{,}0254 \log \sigma_s.$$

Wenn $\sigma_s = 500 \frac{kg}{cm^2}$, so ist $\frac{e_2}{e_1} = 1{,}14$, d. h. die Nullinie wird bei dem betrachteten Material und der gegebenen Spannung aus der Mitte gegen die Druckseite nach dem Verhältnis $\frac{e_2}{e_1} = 1{,}14$ verschoben.

3. Aus einem anderen Versuche Bachs war für Gußeisen annäherungsweise:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^7}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{25 \cdot 10^9}, \quad m_1 = 1{,}491 \text{ und } m_2 = 2{,}623.$$

Aus Gl. (8.) ist

$$\log \frac{e_2}{e_1} = -1{,}293 + 0{,}4545 \log \sigma_s.$$

Bei $\sigma_s = 500 \frac{kg}{cm^2}$ erhält man $\frac{e_2}{e_1} = 0{,}859$, d. h. die neutrale Faser bei diesem Material wird bei 500 $\frac{kg}{cm^2}$ Zugspannung aus der Mitte gegen die Zugseite verschoben.

Aus Gl. (4.) ist das dazugehörige

$$\sigma_d = 525 \frac{kg}{cm^2}.$$

5. Die Spannungsvermittlung und die Abmessungen des Querschnitts.

Dieselben ergeben sich aus der Momentengleichung:

$$M = \int_0^{e_1} \sigma_1 \cdot df_1 \cdot y_1 + \int_0^{e_2} \sigma_2 \cdot df_2 \cdot y_2. \qquad (9.)$$

Beim rechteckigen Querschnitt ist $df_1 = B \cdot dy_1$ und $df_2 = B \cdot dy_2$; daher nach Einsetzung der Werte für σ_1 und σ_2 aus Gl. (6.)

$$\frac{M}{B} = \int_0^{e_1} \left(\frac{\alpha_2}{e_2 \cdot \alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \cdot \sigma_s^{\frac{m_2}{m_1}} \cdot y_1^{\frac{1}{m_1}} \cdot y_1 \cdot dy_1 + \int_0^{e_2} \left(\frac{1}{e_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \cdot \sigma_s \cdot y_2^{\frac{1}{m_2}} \cdot y_2 \cdot dy_2$$

$$= e_2^2 \cdot \sigma_s \cdot \frac{m_2}{2m_2+1} \cdot \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \cdot \sigma_s^{\frac{m_2-m_1}{m_1}} \cdot \frac{m_1 \cdot (2m_2+1)}{m_2 \cdot (2m_1+1)} \cdot \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^{\frac{2m_1+1}{m_1}} + 1\right].$$

Führt man aus Gl. (8.) den Wert für $\frac{e_1}{e_2}$ ein, so entsteht die Beziehung:

$$\frac{M}{B} = e_2^2 \cdot \sigma_z \frac{m_2}{2m_2+1} \cdot$$
$$\left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{m_1+1}} \cdot \frac{2m_2+1}{2m_1+1} \cdot \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_1+1}} \cdot \left(\frac{m_1+1}{m_2+1}\right)^{\frac{2m_2+1}{m_1+1}} \cdot \sigma_z^{\frac{m_1-m_2}{m_1+1}} + 1\right] \cdot \quad (10.)$$

(10.) kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{M}{B} = e_2^2 \cdot \sigma_z \cdot p\,[q \cdot \sigma_z^r + 1]. \quad (11.)$$

Gl. (8.) hat die Form $\frac{e_2}{e_1} = s \cdot \sigma_z^t$. (8^1)

Es ist $e_1 + e_2 = H$ der Querschnittshöhe,

$$e_1 = H - e_2$$

$$\frac{e_2}{H - e_2} = s \cdot \sigma_z^t \text{ und hieraus}$$

$$e_2 = H \cdot \frac{s \cdot \sigma_z^t}{1 + s \cdot \sigma_z^t}.$$

Diese Größe in (11.) eingesetzt, gibt

$$\frac{M}{B} = H^2 \frac{s^2 \cdot \sigma_z^{2t}}{(1 + s \cdot \sigma_z^t)^2} \cdot \sigma_z \cdot p\,(q \cdot \sigma_z^r + 1). \quad (12.)$$

Gl. (12.) besagt, daß das Moment der inneren Kräfte dem Quadrat der Höhe des Querschnitts proportional ist. Sie kann zur Dimensionierung eines Balkens mit veränderlicher Stoffelastizität nach Gl. (I) u. (II) oder zur Ermittlung der Spannungen für ein gegebenes Moment benutzt werden.

Für konstant elastische Stoffe $[\alpha_1 = \alpha_2,\ m_1 = m_2 = 1]$ geht (12.) über in die Form: $\frac{M}{B} = \frac{1}{6} H^2 \cdot \sigma_z$.

b) Graphische Ermittlung der Spannungsverteilung.

Aus den in Absatz 3—5 gegebenen Darlegungen erkennt man die Umständlichkeit der Spannungsermittlung für den Fall, daß die Gleichung der Deformationslinie bekannt und die Unmöglichkeit, wenn sich eine solche Gleichung nicht aufstellen läßt oder wenn diese nicht bekannt ist. Es liegt nahe, bezw. es ist der einzig mögliche Weg, zur Spannungsbestimmung die bildliche Darstellung zu verwenden, was dann stets möglich sein wird, wenn die Linie des Zusammenhanges von ε und σ durch Zug- und Druckversuche gefunden worden ist, Bei Unkenntnis jener Kurve ist uns der Einblick in die inneren Kräfte versagt.

α) Spannungen im rechteckigen Querschnitt.

6. Spannungsflächen. (Fig. 2.)

Wir betrachten einen Stab von der Breite 1 und der Querschnittshöhe H. Wir tragen die Längenänderungskurve von einem Punkte O aus

auf, indem wir als Ordinaten die mit r multiplizierten Längenänderungen ε, also $y = r \cdot \varepsilon$ und als Abszissen die dazu gehörigen Spannungen σ abmessen. r bedeutet eine beliebige Konstante.

Die Spannung im Flächenelement $dy \cdot 1$ ist $\sigma \cdot dy \cdot 1$.

Die Gesamtdruckkraft ist $D = \int_0^{e_1} \sigma dy = f_1$ der oberen Spannungsfläche.

Die Gesamtzugkraft ist

$$Z = \int_0^{e_2} \sigma dy = f_2$$

der unteren Spannungsfläche. Da bei reiner Biegung $D = Z$, so muß $f_1 = f_2$.

Ist z. B. σ_z eine gegebene Größe, so läßt sich die zweite Randspannung σ_d bestimmen, indem $f_1 = f_2$ gemacht wird (mit dem Planimeter oder durch Teilung in parallele Abschnitte). Gleichzeitig erhält man die Lage der Nullinie aus der Beziehung:

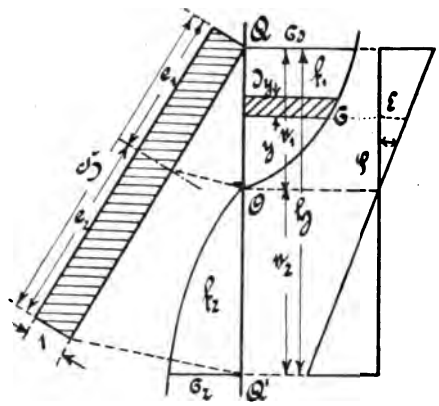


Fig. 2.

$$\mathfrak{H} : H = e_1 : e_1,$$

worin H die Höhe des zu untersuchenden Querschnittes und e_1 die Entfernung der neutralen Faser von der oberen Kante ist.

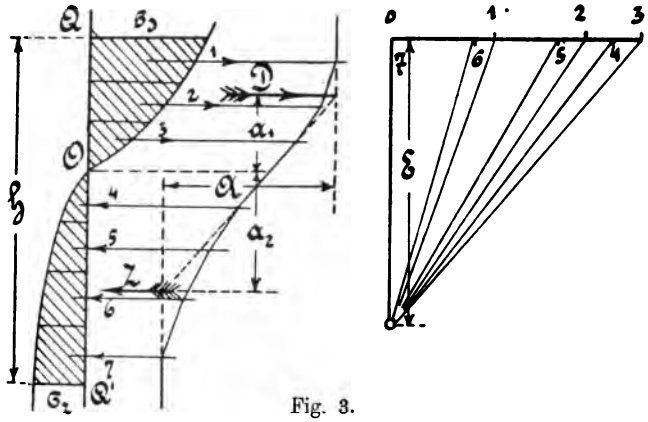


Fig. 3.

7. Momente der Spannungsflächen. (Fig. 3.)

Das Moment der inneren Kräfte für eine bekannte Spannungsfläche wird zeichnerisch wie folgt ermittelt. Man teilt die Flächen f_1 und f_2 horizontal in Abschnitte, in deren Schwerpunkten Kräfte 1, 2, ... 7

wirkend gedacht werden, die den Abschnitten proportional sind. Hierfür konstruiert man den Kräfteplan mit der Polentfernung E und das Seileck. Das Krafteck ist geschlossen, weil $D = -Z$; daher sind die Endseiten des Seilecks parallel. Ihr horizontaler Abstand ist A. Das Moment der Spannungsflächen ist $\mathfrak{M} = A \cdot E$.

Derselbe Wert ergibt sich aus dem Produkt der Fläche mit ihren Schwerpunktsabständen:

$$\mathfrak{M} = f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 = f_1 (a_1 + a_2).$$

Wenn die Querschnittshöhe $H = m \cdot \mathfrak{H}$, dann vergrößern sich sämtliche Kräfte um das $m$fache; daher stellt E $m \cdot E$ Krafteinheiten dar. Die Höhendimensionen der Flächenabschnitte ver$m$-fachen sich desgleichen; es wird also aus A $m \cdot A$.

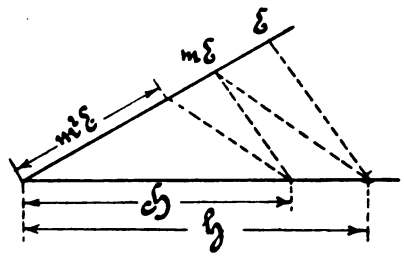


Fig. 4.

Das Moment der Innenkräfte auf 1 cm Querschnittsbreite ist dann;

$$M = m \cdot A \cdot mE = m^2 \cdot AE.$$

In Fig. 4 ist die Multiplikation von E mit m^2 dargestellt.

Das Moment, welches ein rechteckiger Querschnitt von der Breite B, der Höhe H und den bekannten Randspannungen σ_d und σ_z übertragen kann, ist demnach

$$\overline{M} = B \cdot M = m^2 E \cdot A \cdot B.$$

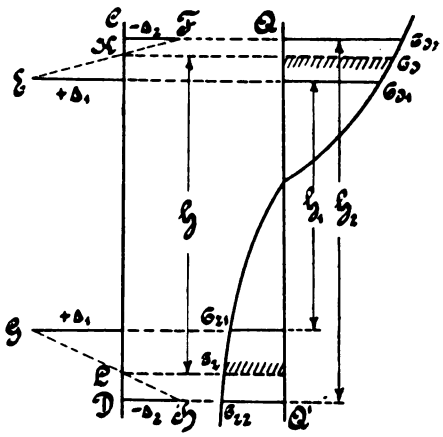


Fig. 5.

8. Aufgabe. (Fig. 5.)

Aus dem gegebenen Moment $\overline{M}$ und den Abmessungen B und H sind die Randspannungen zu suchen.

$$\overline{M} = m^2 \cdot AEB.$$

Hieraus ist das erforderliche

$$m^2 A = \frac{\overline{M}}{EB} = M'.$$

Man nimmt zwei zusammengehörige Spannungsflächen f_1 und f_2 mit den Randspannungen σ_{d_1} und σ_{z_1} an und sucht hierzu $m_1^2 A_1$. Die Differenz $\Delta_1 = M' - m_1^2 \cdot A_1$ trägt man senkrecht auf CD auf und erhält die Punkte E und G. Für ein anderes Spannungsflächenpaar ist $\Delta_2 = M' - m_2^2 \cdot A_2$. Ist Δ_1 positiv, Δ_2 negativ, so bestimmt

$KL = \mathfrak{H}$ eine Höhe, der das Moment M' annähernd entspricht. Die zugehörigen Spannungen σ_d und σ_z können abgegriffen werden.

β) Spannungen im T-Querschnitt.

9. Grundsätzliche Lösung.

Hätte der Balken die Querschnittsbreite b, so wären die Spannungen wie unter α) zu verteilen. Die Ermittlung der Spannungen im T-Balken (Fig. 6) läßt sich auf den Fall α) zurückführen wie folgt. Wir betrachten einen Balken, dessen Stegbreite $b = 1$ wäre und reduzieren die Plattenbreite B im selben Verhältnis auf $\frac{B}{b} = n$. (Fig. 7.)

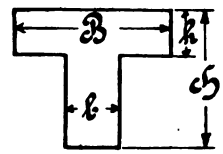


Fig. 6.

Die Spannung von R bis T beträgt auf 1 cm Höhe und 1 cm Breite $\sigma \cdot 1 \cdot 1 = \sigma$. Von R bis S ist die Spannung auf die Höhe 1 und die Breite n

$$\sigma \cdot 1 \cdot n = n \cdot \sigma.$$

Wenn wir daher von R bis S die $n$fachen Spannungen auftragen, erhalten wir die obere Spannungsfläche $OSUVWO$. Die weitere Behandlung erfolgt analog α).

10. Aufgaben. (Fig. 7.)

Aus der gegebenen Randspannung σ_z und den Querschnittsabmessungen ist die Momentenfähigkeit des Balkens zu bestimmen. Für den Plattenteil bestimmen wir die Kurve der n-fachen Spannungen OU. In die Kurve der einfachen Spannungen wird der Wert σ_z eingetragen, f_1 bestimmt und f_2 gleich gemacht. Nun nehmen wir eine Spannung σ_{d_1} so an, daß die hinzukommende Spannungsfläche f_3 schätzungsweise gleich ist der Fläche $PUVW$. Wir ziehen CT_1 und durch D die Parallele DR_1, wodurch die Fläche $PUV_1W_1 = f_4$ entsteht. Den Unterschied $f_4 - f_3 = \Delta_1$ tragen wir in R_1 und T_1 auf; wenn Δ_1 positiv ist, muß f_3 auf f_3' mit zugehörigem σ_{d_2} vergrößert werden. Ziehen wir $DR_2 \parallel CT_2$, so erhalten wir die Fläche $PUV_2W_2 = f_4'$. Den Unterschied $f_4' - f_3' = \Delta_2$ tragen wir in

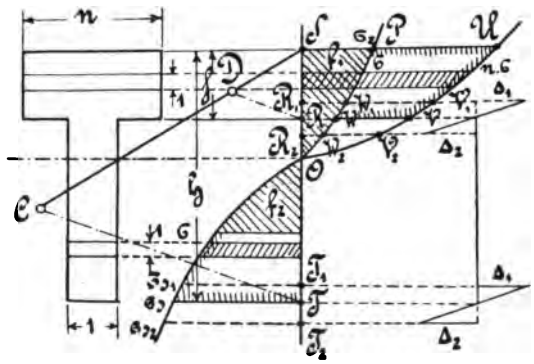


Fig. 7.

R_2 und T_2 an. Ist z. B. Δ_2 positiv, so werden R und T annähernd richtige Punkte sein, womit die Spannungsflächen und σ_d gefunden sind. Andernfalls ist der Vorgang zu wiederholen. Die Momente ergeben sich aus der Seillinie wie unter α).

Übersteigt σ_d den zulässigen Wert, dann ist σ_d in die Kurve einzutragen und daraus in ähnlicher Weise wie vorher σ_z zu bestimmen.

Sind das Moment und die Querschnittsabmessungen gegeben und hieraus die Randspannungen zu bestimmen, so kann diese Aufgabe durch eine Kombination der Verfahren unter 8. und 7. gelöst werden.

γ) Spannungen in beliebig geformten Querschnitten.

11. Gleichschenkliges Dreieck. (Fig. 8.)

Man trägt in der Spannungskurve die zulässige Randspannung σ_d ein und reduziert das Dreieck so, daß die neutrale Schicht die Breite 1 hat. Die reduzierte Spannung in der Dreiecksspitze ist Null, im Abstande y_2 von der Nullinie ist die reduzierte Spannung

$$\sigma_2' = \frac{e_2 - y_2}{e_2} \cdot \sigma_2,$$

im Abstande y_1 ist

$$\sigma_1' = \frac{e_2 + y_1}{e_2} \cdot \sigma_1.$$

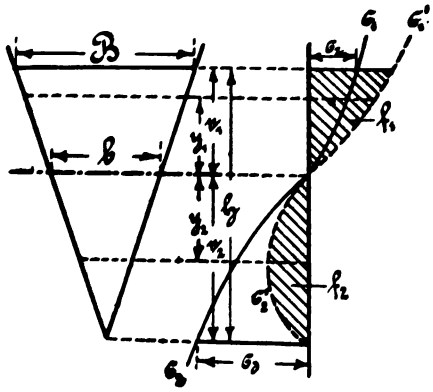


Fig. 8.

Die Spannungsflächen werden erhalten, wenn σ_z so gewählt ist, daß $f_1 = f_2$. Daraus ergibt sich nach früherem die Größe des Moments aus dem Abstand der Endseilstrahlen mit

$$\mathfrak{M} = A \cdot E \text{ und}$$

$$M = m^2 \cdot AE \cdot b, \text{ wobei } m = \frac{H}{\mathfrak{H}} \text{ und } b = B\frac{e_2}{H};$$

demnach ist

$$M = m^2 \cdot AE \cdot B\frac{e_2}{H}.$$

12. I-Querschnitte. (Fig. 9.)

Für diesen trägt man die 1, n und $n_1$fache Spannungskurve des Materials auf. n und n_1 bedeuten die reduzierten Flanschbreiten, wenn die Stegdicke 1 ist.

13. Kreisquerschnitt. (Fig. 10.)

Die reduzierte Spannungskurve wird nach der Beziehung gezeichnet:

$$\sigma_1' = \sigma_1 \cdot \frac{x}{\frac{D}{2}}.$$

Ist $f_1 < f_2$, so wird σ_d größer angenommen. Das Moment der Spannungen ist

$$\overline{M} = m^2 \cdot AE \cdot D,$$

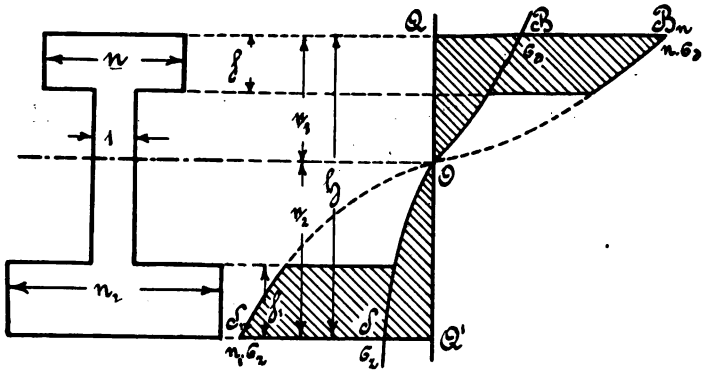


Fig. 9.

worin D der Kreisdurchmesser wäre.

Für konstant elastische Stoffe ist die Spannungslinie eine Gerade.

$$\sigma_1 = k \cdot \frac{y}{\frac{D}{2}}.$$

Die reduzierte Spannung ist

$$\sigma_1' = \sigma_1 \cdot \frac{x}{\frac{D}{2}} = \frac{2ky}{D} \cdot \frac{2x}{D}$$

$$= \frac{4k}{D^2} \cdot xy;$$

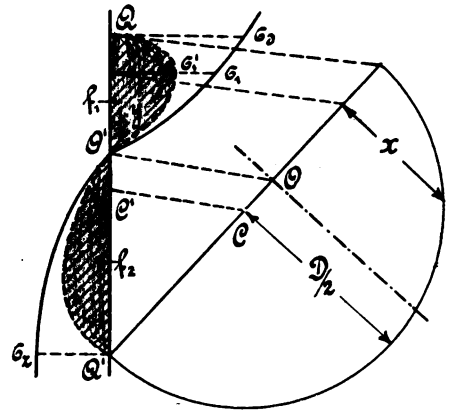


Fig. 10.

Daher ist das Moment:

$$\overline{M} + D \int \sigma' \cdot dy \cdot y = \frac{4kD}{D^2} \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} xy^2 \cdot dy.$$

$x\,dy$ ist ein Flächenelement des Kreises.

y bedeutet den Abstand desselben von der Nullinie.
$y^2 \cdot x dx$ ist demnach das Trägheitsmoment des Flächenelements.
$\int y^2 \cdot x dx$ ist das Trägheitsmoment des Halbkreises; daher

$$\overline{M} = \frac{4kD}{D^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi D^4}{64} = k \frac{\pi D^3}{32},$$

was mit der bekannten Beziehung Übereinstimmung ergibt, wenn k die Randspannung bedeutet.

B. Spannungen und Deformationen der Verbundkörper.

Wenn zwei Körper unverschieblich miteinander verbunden sind, vollführen sie an ihren Berührungsflächen Gestaltänderungen gemeinsam. Haben die Stoffe gleiche Elastizität, so wirken sie wie ein einfacher Körper, als welche sie berechnet werden können (z. B. genieteter eiserner Träger).

Ist aber ihr Federungsvermögen verschieden, dann beeinflussen sie sich gegenseitig in ihren Spannungen, die durch äußere Kräfte entstanden sind, derart, daß der elastischere Stoff, weil ihm der weniger elastische in gleichem Maße nicht folgen kann, diesem einen Teil seiner Spannungen aufbürdet und daher selbst entlastet wird.

a) Voraussetzungen, Grundlagen und Erfahrungen.

14. Voraussetzungen.

Für die Untersuchung der inneren Kräfte in Verbundkörpern wird vorläufig vorausgesetzt, daß sie spannungslos seien, wenn keine äußeren Kräfte auf sie einwirken. Diese Annahme wird in der Regel nicht zutreffen.

Fassen wir einen Körper aus Zementbeton und Eisen ins Auge, so wissen wir, daß der Beton bei der Erhärtung unter Wasser durch mehrere Jahre hindurch sein Volumen nicht unbeträchtlich vermehrt. Die Folge ist eine Ausdehnung des eingelagerten Eisens, das seinerseits den Beton zusammendrückt, von den Berührungsflächen aus abnehmend. Es entsteht demnach ein Spannungszustand, der die Festigkeit des Bauwerkes unter Umständen bedeutend verändern kann. Daß durch diese Eigenspannungen das Eisen zerrissen werden könnte, wie Barkhausen in der Z. f. A., 1901, H. 2, meint, dürfte wohl ausgeschlossen sein; immerhin sind aber Spannungen möglich, die die Proportionalitätsgrenze des Eisens überschreiten.

Bei der Erhärtung des Zementmörtels an der Luft tritt eine Raumverminderung ein. Das Eisen wird daher Druckkräfte aufnehmen, während der Beton von dem der Zusammendrückung widerstrebenden Eisen gezogen wird; da Zugkräfte im Beton in Anbetracht seiner geringen Zugfestigkeit unerwünscht sind, so ist die Volumsverminderung eine eminent schädliche Eigenschaft, die am stärksten in reinen Zementkörpern auftritt.

Einen weiteren Teil an inneren Spannungen werden Temperaturdifferenzen gegenüber der Bautemperatur hervorrufen, da sich Eisen und Portlandzementbeton nicht vollständig gleich ausdehnen. Wenn die Wärmedehnungsziffer für Beton $\alpha_b = 0{,}0000137$ und für Eisen $\alpha_e = 0{,}0000123\,5$, so entsteht bei 1° C. ein Dehnungsunterschied von $\alpha_b - \alpha_e = 0{,}0000013\,5$. Da sich Beton stärker ausdehnt, entstehen bei Temperaturerhöhungen Druck-, bei Wärmeabnahme Zugkräfte, während unter denselben Umständen im Eisen Zug- bezw. Druckspannungen auftreten.

Von Bedeutung für die inneren Spannungen sind die verschiedenen Elastizitätsgrade, d. h. die bleibenden Formänderungen des Betons und Eisens. Während bei Flußeisen die bleibende Längenänderung nach Versuchen Bachs etwa $\frac{1}{27}$ der federnden ist $\left(\text{Belastungen } 300 - 900 \frac{kg}{cm^2}\right)$ vergrößert sich dieses Verhältnis bei Gußeisen auf $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{17}$ $\left(\text{Belastungen bis } 600 \frac{kg}{cm^2}\right)$, bei Granit auf $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{7}$ $\left(\text{Belastung bis } 40 \frac{kg}{cm^2}\right)$. Für Beton dürfte das Verhältnis noch ungünstiger als bei Granit sein. Nach den ersten Druckspannungen wird im Beton demnach eine Dehnung durch das nahezu seine ursprüngliche Länge anstrebende Eisen, nach Zuganstrengungen hingegen eine Zusammendrückung des Betons eintreten. Von Wichtigkeit ist dieses Verhalten für die Bestimmung der Durchbiegungen.

Die bedeutungsvollste Voraussetzung für die Ermittlung der Spannungen in Verbundkörpern ist das Ebenbleiben von ebenen Querschnitten. Schon für homogene und konstant-elastische Körper ist diese Annahme eine Hypothese, die dort nicht zutreffen wird, wo bedeutende Schubkräfte entstehen, die eine Biegung der Querschnitte erzeugen. Die gemachte Annahme wird bei Verbundkörpern noch viel weniger mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen, da außer der allgemeinen Biegung der Querschnitte noch örtliche Verbiegungen derselben durch die eingelegten anderselastischen Eisenflächen entstehen werden (Ö.W. f. d. ö. B. 1902 — Brik). Die Verbiegungen der Querschnitte sind um so stärker, je mehr die Schubspannungen im Verhältnis zu den Anstrengungen infolge der Biegungsmomente wachsen (Versuche von Bach, Elastizität und Festigkeit 1902.)

15. Wesen der Beton-Eisen-Konstruktionen.

Das Elastizitätsmaß des Eisens ist gering ($5 \cdot 10^{-7}$), seine Festigkeit dagegen groß, während die Elastizität des Betons 5- bis 40mal größer, seine Festigkeit aber in noch höherem Maße kleiner ist (auf Druck 8- bis 30-, auf Zug mindestens 100mal). Diese Gegensätze vereinigen sich zu einer gemeinsamen Funktion, deren Resultat die erstaunliche Widerstandsfähigkeit sachgemäß ausgeführter Beton-Eisenbauten ist.

In der Verschiedenheit der erwähnten Eigenschaften beruht das Wesen des armierten Betons. Absolute Unverschieblichkeit zwischen beiden Stoffen vorausgesetzt, vollführen sie gemeinsame Formänderungen. Gleichen Längenänderungen entsprechen Spannungen, die nach früherem 5- bis 40- und mehr mal verschieden sind, so daß das festere Eisen in diesem Maße höhere Spannungen zugeteilt erhält als der weniger feste Beton. Am größten ist der Unterschied in den Zugfestigkeiten des Betons und Eisens sowie in den bezüglichen Elastizitätsmaßen. Es ist daher die Verbundwirkung in der Zugzone am eklatantesten. Hierzu tritt noch die nur hypothetisch erklärte Tatsache, daß der armierte Beton Dehnungen zu erleiden vermag, bei denen er allein schon längst zerrissen wäre (Versuche von Grut und Considère), oder mit anderen Worten: Die Elastizität des Betons wird durch die Armierung in hohem Maße, bis etwa 0,001 Dehnung bei etwa 25 $\frac{kg}{cm^2}$ Spannung, also auf das 80fache jener des Eisens gesteigert.

16. Lage der Eisenarmierung.

In gebogenen Stäben hat sie möglichst nahe der Zugkante, in gedrückten, wenn Knickgefahr vorhanden, an den Rändern zu liegen. Der Abstand der Eiseneinlage vom Rande muß so bemessen sein, daß die Übertragung der Eisenspannungen auf den Beton sicher erfolgen kann. Er wird also von den Dimensionen der Einlagen abhängen. Ein zu geringer Abstand kann Abspringen der Steinteile erzeugen; Oberflächenrisse des Betons können sich leicht bis zum Eisen fortsetzen und dessen Verrostung verursachen. Die Lage wird daher wesentlich eine Erfahrungssache sein.

17. Festigkeiten und Formänderungen des Betons.

Der Natur des Zementbetons entsprechend sind die Festigkeiten sowie die Beziehungen zwischen Spannungen und Längenänderungen für die einzelnen Sorten außerordentlich verschieden. Sie werden bedingt durch das Mischungsverhältnis, die Eigenschaften der Gemengteile, die Herstellung, durch das Alter u. s. w. Leider geben die Versuche, so zahlreich solche auch schon ausgeführt wurden, noch lange keinen vollständigen Einblick in diese für die Festigkeitsberechnung wesentlichen

Eigenschaften. Vor allem mangeln die Beziehungen bei höheren Beanspruchungen bis zum Bruch, so daß man vielfach noch auf Vermutungen und Annahmen angewiesen ist.

Tabelle I. Einige Resultate von Festigkeitserprobungen.

Nr.	Mischung	Alter	Feuchtigkeit	Festigkeit			Anmerkung
				Druck	Zug	Biegung	
1.	1 : 2 (Kalkmörtel)	7 Tg.	mörtelgerecht	20,9	5,6	—	Mitgeteilt von H. Buchartz C. d. B. 1902
		„	erdfeucht	115,8	15,3	—	
		28 Tg.	mörtelgerecht	53,3	11,4	—	
		„	erdfeucht	188,2	23,9	—	
2.	1 : 3 (Sand)	„	9% Wasser	285 (165)	17 (37)	—	Vers. von Bach; die eingeklammert. Zahlen beziehen sich auf kl. Probekörper
		„	9½% „	292 (203)	25 (39)	—	
	1 : 3 (Sand)	7 Tg.	—	205	22	—	Wayss & Freytag
		28 „	—	294	29	—	
		90 „	—	326	34	—	
3.	1 : 3 (Sand u. Schotter)	über 90 Tg.	—	—	—	42-50	Hanisch u. Spitzer
	1 : 3	90 Tg.	8% Wasser	—	12,6	21,4	Wayss & Freytag
		„	14% „	—	10,5	23,2	
4.	1 : 3½ (Sand u. Schotter)	über 90 Tg.	—	—	—	33-40	Hanisch u. Spitzer
		268 Tg.	—	308	25	—	Hanisch
5.	1 : 4 (Sand u. Schotter)	über 90 Tg	—	—	—	24-30	Hanisch u. Spitzer
	1 : 4 (Sand)	28 Tg.	12% Wasser	130,8	—	—	Mitgeteilt von H. Buchartz C. d. B. 1902
		„	7,5% „	203,9	—	—	
	1 : 4	90 Tg.	8% „	—	9,2	16,1	Wayss & Freytag
		„	14% „	—	8,8	16,7	
6.	1 : 6	7 Tg.	—	85	11	—	Wayss & Freytag
		28 „	—	112	16	—	
		90 „	—	135	17	—	
7.	1 : 7	„	8% Wasser	—	4,4	13,3	Wayss & Freytag
		„	14% „	—	5,5	12,8	
8.	1 : 2½ : 5	7 Tg.	—	202	—	—	Würfel v. 10 cm
		28 „	—	254	—	—	
		6 Mon.	—	332	—	—	Würfel v. 20 cm
		2 Jahre	—	509	—	—	
							Bau d. Donaubrücke bei Munderkingen.
9.	1 : 10 (Sand)	28 Tg.	wasserreich	35,4	—	—	Mitgeteilt von H. Buchartz C. d. B. 1902
		„	feucht	72,8	—	—	

Tabelle II. Einige Resultate der Prüfung auf Formänderung.
(Die Nummern stimmen mit den Kurven in Tafelfig. 1 überein.)

Nr.	Mischung	Wasser-Menge	Erprobung auf	$f(\varepsilon, \sigma)$	$\varepsilon \cdot 10^5$	σ	Anmerkung
	1 : 0 (reiner Zement)	—	Druck	$\varepsilon = \frac{1}{250000} \cdot \sigma^{1,09}$			Druck-versuche von v. Bach
1.	$1 : 1^1/_2$	—	„	$\varepsilon = \frac{1}{356000} \cdot \sigma^{1,11}$	4	10,9	
					25	57,0	
2.	1 : 3 (Sand)	—	„	$\varepsilon = \frac{1}{315000} \cdot \sigma^{1,15}$	4	9,1	
					25	44,6	
3.	$1 : 2^1/_2 : 5$ (Sand, Schotter)	—	„	$\varepsilon = \frac{1}{457000} \cdot \sigma^{1,157}$	4	12,3	
					25	60,1	
					100	199,5	
4.	$1 : 2^1/_2 : 5$ (Sand, Kies)	—	„	$\varepsilon = \frac{1}{298000} \cdot \sigma^{1,145}$	4	10,6	
					10	19,4	
					25	43,2	
5.	1 : 3 : 6 (Sand, Schotter)	—	„	$\varepsilon = \frac{1}{380000} \cdot \sigma^{1,161}$	4	10,2	
					10	22,9	
					25	50,5	
6.	1 : 3	8%	Druck	$\frac{1}{\alpha} = 300000$ für $\sigma = 3$	4,3	12,2	Wayss & Freytag
				bis 240000 „ $\sigma = 61,3$	25,5	63	
			Zug	$\frac{1}{\alpha} = 267000$ „ $\sigma = 1,6$	1,3	3,1	
				bis 196000 „ $\sigma = 9,2$	4,7	9,2	
		14%	Druck	$\frac{1}{\alpha} = 272000$ „ $\sigma = 3$	4,8	12,2	
				bis 209000 „ $\sigma = 61,3$	29,3	61,3	
			Zug	$\frac{1}{\alpha} = 230000$ „ $\sigma = 1,6$	2,3	4,6	
				bis 175000 „ $\sigma = 7,2$	4,4	7,7	
7.	1 : 4	8%	Druck	$\frac{1}{\alpha} = 273000$ „ $\sigma = 3$	4,9	12,2	
				bis 211000 „ $\sigma = 61,3$	29	61,3	
			Zug	$\frac{1}{\alpha} = 266000$ „ $\sigma = 1,6$	2,1	4,7	
				bis 190000 „ $\sigma = 7,80$	4,1	7,8	

18. Bildliche Darstellung der Formänderungen. (Taf.-Fig. 1—3.)

Die Tafelfigur 1 zeigt eine Anzahl Betonspannungskurven mit den dazugehörigen Längenänderungen. Die Linien 1, 2, 3, 4 und 5 rühren von Bach, 6, 7 und 8 von Wayß & Freytag her, 9 ist eine mittlere Linie nach dem Gesetze

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{300000} \cdot \sigma^{1,15} \text{ für Druck und}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{150000} \cdot \sigma^{1,4} \text{ für Zug.}$$

10 ist die Linie aus den Considère'schen und Grut'schen Versuchen. Aus dem Vergleich der gezeichneten Kurven sind die großen Abweichungen ersichtlich, die selbst bei ähnlich gemischten Betonsorten auftreten. Bedingt sind dieselben wahrscheinlich durch die zur Bereitung verwendeten Wassermengen, die Intensität des Stampfens, durch die Eigenschaften von Sand und Schotter (vgl. Kurve 3 und 4 für Kies und Schlägelschotter), durch die Zementqualität und durch die Art der Erprobung. Für Zugbeanspruchungen sind die Versuche spärlich und noch unsicherer (s. Abs. 2).

Tafelfigur 2 gibt eine vergleichende Gegenüberstellung der Formänderungen des schmiedbaren Eisens, des Gußeisens (nach Bach) und des Betons bis zum Bruch dieser Stoffe. In Tafelfigur 3 ist das Verhalten der genannten Materialien hauptsächlich bis zur Proportionalitätsgrenze des Eisens zur Anschauung gebracht, wobei auch die durch Versuche mehrfach erwiesene Eigenschaft des armierten Betons gezeigt wird, sich bis etwa zur Proportionalitätsgrenze des Eisens, d. i. 0,001 Dehnung bei 24 bis 26 $\frac{kg}{cm^2}$ Spannung ausdehnen. Die Betondruckkurve wurde nach ihrem mutmaßlichen Verlauf bis zur Bruchspannung (300 $\frac{kg}{cm^2}$ angenommen) eingezeichnet.

Anmerkung. In den Fig. 2 und 3 sind die Betonspannungen in 10mal größerem Maßstabe als die Eisenspannungen dargestellt.

19. Zulässige Betonspannungen auf Druck und Zug.

Hierfür wird der Sicherheitsgrad maßgebend sein, der von einem Bauwerk gefordert wird. Da die Druckfestigkeit bei gutem, sachgemäß gemischtem und genügend altem Beton auf 300, ja selbst 500 $\frac{kg}{cm^2}$ zu schätzen ist und eine 6 bis 10fache Sicherheit für alle Zwecke befriedigend erscheint, so wird die Festsetzung einer zulässigen Druckspannung von 30 bis 50 $\frac{kg}{cm^2}$ je nach der Qualität als entsprechend

bezeichnet werden können (s. Brik, über die zulässige Beanspruchung etc. Ö. W. f. d. ö. B. 1902, H. 30 — Wayß & Freytag, der Beton-Eisenbau 1902, Barkhausen wählt 40, bei ausgeführten Betoneisenbrücken über 50 $\frac{kg}{cm^2}$).

Die Grenze der zulässigen Zugspannungen im armierten Beton wird von dem für Druckbeanspruchungen geltenden Gesichtspunkte kaum zu ermitteln sein. Erkennt man die Versuchsergebnisse an, welche von einem Intaktbleiben der Zugzone zeugen, solange die Eisenspannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze bleiben, so wird die bei der zulässigen Zugbeanspruchung des Eisens auftretende Betonspannung gleichzeitig als die zulässige Betonspannung auf Zug betrachtet werden können. Voraussetzung ist eine so dichte Lage der Eisenstäbe, daß der Beton die spezifische Eigenschaft, welche ihm die Armierung verleiht, besitzt. Der Zusammenhang von Eisen- und Betonspannungen ist aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, die sich auf die Grut-Considère'sche Spannungslinie des Betons mit der Mischung 1 : 3 (Kurve 10 der Tafelfigur 1) bezieht.

1.	Dehnung	0,0001,	Betonzug	16 $\frac{kg}{cm^2}$,	Eisenzug	200 $\frac{kg}{cm^2}$
2.	„	0,00025	„	18 „	„	500 „
3.	„	0,0005	„	21 „	„	1000 „
4.	„	0,001	„	24—26 „	„	2000 „
5.	„	0,002		———	„	4000 „

Die Dehnung 0,002 erreichte Considère mit seinen Zementmörtelprismen mit Flußstahleinlagen, deren Proportionalitätsgrenze bei 4000 lag. Nach Überschreiten dieses Wertes zerriß die Betonzugzone. Bei Flußeiseneinlagen vollzieht sich diese Erscheinung bei etwa 2000 $\frac{kg}{cm^2}$ Spannung mit 0,001 Dehnung. — Lassen wir eine Höchstspannung im Eisen von 800 $\frac{kg}{cm^2}$ zu, so ergibt sich die Betonspannung mit etwa 20 $\frac{kg}{cm^2}$.

Übrigens wird diese in auf Biegung beanspruchten Betonbalken von rechteckigem Querschnitt nicht erreicht und zwar um so weniger, je stärker die Armierung, falls die Druckspannungen 50 $\frac{kg}{cm^2}$ nicht überschreiten, d. h. maßgebend sind in diesem Falle die Druckspannungen.

b) Graphische Ermittlung der Biegungsspannungen und deren Momente.

20. Bemerkungen über die bisher üblichen Methoden und über das graphische Verfahren.

Seit einer Reihe von Jahren beschäftigen sich zahlreiche Ingenieure mit der Aufstellung von Beziehungen und Formeln, welche die Ermittlungen der größten Spannungen oder die Dimensionierung eines Querschnittes für ein gegebenes Moment bezwecken. Alle bedienen sich im Wesen des analytischen Weges, der je nach den gemachten Annahmen bald einfacher, bald umständlicher wird. Der größte Nachteil dieser Methoden besteht darin, daß sie teilweise der Wahrheit ziemlich ferne bleiben, teilweise sich durch eine solche Schwerfälligkeit auszeichnen, daß sie kaum für eine wissenschaftliche Untersuchung, geschweige denn für die Praxis geeignet erscheinen.

Es liegt demnach nahe, den von den Autoren bisher gegangenen Weg gänzlich zu verlassen, auf die Annahme geradliniger, gebrochener, parabolischer etc. Spannungslinien als Grundlage der Berechnung zu verzichten und wie auf so vielen anderen Gebieten der Statik das graphische Verfahren zur Anwendung zu bringen. Die Genauigkeit der nun folgenden Untersuchungen kann dieselbe wie die der Grundlagen sein, d. h. wenn die elastischen Eigenschaften der betrachteten Stoffe für einen bestimmten Fall genau bekannt sind, dann haben auch die Resultate innerhalb der Schwankungen, die durch die allgemeinen Voraussetzungen bedingt werden, denselben Genauigkeitsgrad. Das Verfahren ist für alle Stoffe und Qualitäten anwendbar, ob eine Proportionalitätsgrenze besteht oder nicht, innerhalb der üblichen Spannungen und bis zum Bruch. Erforderlich ist bloß die graphische Darstellung des Zusammenhanges von Längenänderung und Spannung.

Mit Hilfe dieses Weges, der zu weiterer Erkenntnis der Wahrheit beitragen soll, ist es auch möglich, die inneren Kräfte in beliebigen Querschnitten einer Konstruktion ohne besondere Mehrarbeit zu finden, sofern die den Querschnitt beanspruchenden äußeren Kräfte bekannt sind.

Da die Längenänderungen der Fasern und deren Spannungen aus der Zeichnung zu entnehmen sind, ist auch die Ermittlung der Ausbiegung einer Beton-Eisenkonstruktion in beliebiger Richtung ebenso einfach und genau wie bei den konstant-elastischen Stoffen.

Die Ermittlung der Spannungen oder der Querschnitte wird im allgemeinen versuchsweise durchgeführt werden müssen. Der Grund liegt jedoch nicht in der statischen Unbestimmtheit der inneren Kräfte (diese sind immer statisch unbestimmt, d. h. durch die Gesetze der Statik

allein nicht auffindbar), sondern in der Eigenschaft der verwendeten Hilfsmittel. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich mit Hilfe des graphischen Verfahrens sehr einfach, da bei einiger Übung zwei Versuche schon ein Ergebnis liefern.

α) Spannungen im armierten Balken mit rechteckigem Querschnitt.

21. Die Methode.

Die Höhe des Balkens sei H, der Abstand des Schwerpunktes (Schwerlinie) der Eiseneinlage vom Rande a, die Eisenfläche habe die Höhe d und den Querschnitt f_e, die Entfernung der Eisenstäbe sei e.

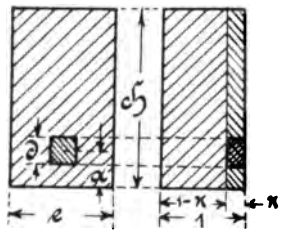


Fig. 11.

Das Verhältnis der Eisenfläche zu einer Querschnittsfläche von der Höhe d ist demnach

$$\frac{f_e}{d \cdot e} = \varkappa. \quad \text{(Fig. 11.)}$$

Wäre in der ganzen Höhe des Balkens der Anteil des Eisens $\varkappa$, so könnte man sich dafür einen Eisenstab von der Höhe H und der Breite $\varkappa$ denken, wenn die Gesamtbreite des Querschnitts mit 1 angenommen wird. Die dazu gehörige Breite des Betonbalkens wäre $(1 - \varkappa)$.

Zeichnen wir (Fig. 12) die Spannungskurve BOC für den Beton, so entspricht diesem die Spannungslinie GOF für das Eisen, wenn die Breite des Eisenquerschnitts dieselbe wie die des Betons wäre, nämlich 1. Da die Eisenbreite $\varkappa$ ist, so beträgt die Eisenspannung auf 1 *cm* Höhe nicht σ_e, sondern $\varkappa \cdot \sigma_e$, woraus sich die Spannungslinie des Eisens HOK ergibt. Die gestrichelte Linie NOP stellt die Spannungskurve für die reduzierte Betonfläche von der Breite $(1 - \varkappa)$ dar. Da der Eisenquerschnitt die Höhe d hat, so ist die schraffierte Fläche die Spannungsfläche des Betoneisenquerschnittes, dessen Höhe $\mathfrak{h}$ ist. Nach früherem ist $f_1 = f_2$.

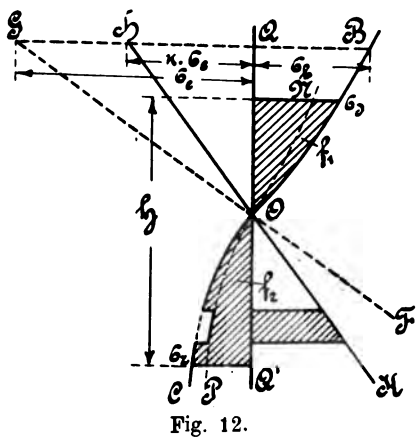


Fig. 12.

22. Aufsuchen des Biegungsmoments.

Es seien die Querschnittsabmessungen H und B, die Eisenfläche f_e, deren Höhe d und Lage a sowie die Höchstspannungen σ_d bezw. σ_e gegeben. (Fig. 13.)

Man zeichnet die Spannungskurve BOC für Beton und HOL für Eisen mit $\varkappa = \frac{f_e}{B \cdot d}$, trägt ferner unter beliebigem Winkel auf QQ_1 die Maße H, a und d an, nachdem σ_d in die Betonkurve eingeführt ist. Man wählt schätzungsweise σ_{z_1} und zieht $NR_1' \parallel MS_1' \parallel Q_1Q_1'$. Die erhaltene Spannungsfläche ist $OC_1Q_1'S_1'S_1R_1R_1'O = f_2'$, die Differenz $f_1 - f_2' = \Delta_1 = Q_1'T_1$. Nun wiederholt man den Vorgang. War Δ_1 positiv, so wählt man ein größeres σ_{z_2} und bestimmt hierzu $f_1 - f_2'' = \Delta_2 = Q_2'T_2$. Ist nun Δ_2 negativ, so liegt im Schnittpunkt der Geraden T_1T_2 mit QQ_2' das annähernd richtige σ_z. Damit läßt sich die untere Spannungsfläche f_2 und sonach das Moment $\mathfrak{M}$ nach Abs. 7 bestimmen. Das Moment des Querschnitts ist dann

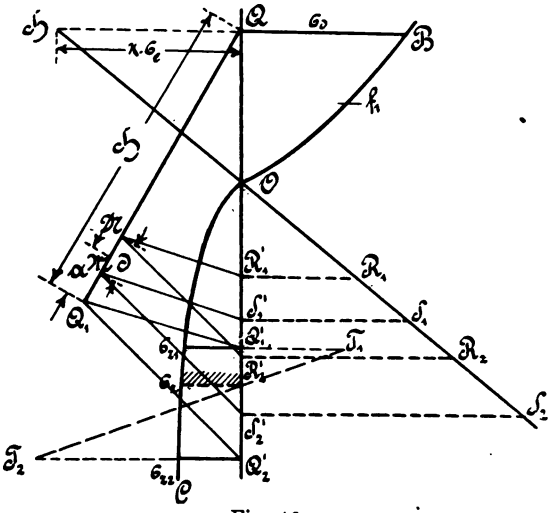


Fig. 13.

$$\overline{M} = m^2 \cdot A \cdot E \cdot B.$$

Will man diese Versuche, deren wenigstens zwei notwendig sind, nicht machen, so kann man durch eine kleine Rechnung annähernd auch zum Ziel kommen. Man nimmt CD (Fig. 14) beliebig an und hat die fehlende Fläche f' (schraffiert) zu berechnen. Angenähert ist

$$f' = uv + ew; \text{ ferner.}$$

$$u = (x - b) \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$v = d\frac{x}{h},$$

$$w = x + y - m$$

$$y = a\frac{x}{h}, \text{ daher}$$

$$w = x + \frac{ax}{h} - m, \text{ also}$$

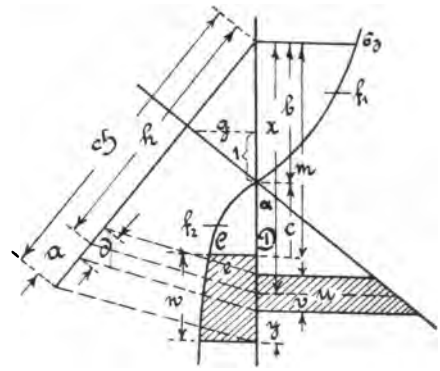


Fig. 14.

$$f_1 - f_2 = f' = (x - b) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{dx}{h} + e \cdot \left[x + \frac{ax}{h} - m \right].$$

Geordnet:

$$x^2 \cdot d \operatorname{tg} \alpha + x (eH - bd \operatorname{tg} \alpha) - h (me + f') = 0.$$

Da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{1} = g$, so ist

$$x^2 \cdot dg + x (eH - bdg) - h (me + f') = 0.$$

Die Form der Gleichung lautet:

$$Ax^2 + Bx - C = 0, \text{ daraus}$$

$$x = \frac{-B + \sqrt{4AC + B^2}}{2A}.$$

Aufgaben.

Zu einem gegebenen äußern Moment sind in einem bekannten Querschnitt die Spannungen zu ermitteln.

Die Lösung erfolgt durch Kombinieren der Verfahren in Abs. 7 und Abs. 8.

Ist unter Annahme der zulässigen Spannungen für ein gegebenes Moment der Querschnitt zu suchen, so kann dies ohne weiteres auf Grund der gegebenen Methoden erfolgen, wenn man z. B. den Eisenprozentsatz annimmt — in diesem Falle kann der Querschnitt unmittelbar durch entsprechende Wahl von $m = \frac{H}{\mathfrak{H}}$ gefunden werden — oder wenn man Höhe und Breite als feststehend betrachtet und die Stärke der Armierung durch Versuch ermittelt. Schließlich kann man auch das Verhältnis von $\frac{H}{B}$ und die Armierungsprozente festsetzen und daraus H und B sowie die Eiseneinlagen selbst bestimmen.

23. Graphische Ermittlung zusammengehöriger Spannungsflächen.

Um zu einer gegebenen Druckspannungsfläche f_1 die gleichgroße Zugspannungsfläche direkt zu finden, kann man folgenden Weg einschlagen.

Man konstruiert zur Druck- und Zugkurve des Betons Linien, deren Ordinaten z die Fläche von O biz y (Fig. 2) darstellen und deren Abszissen y sind. Die Beziehung zwischen σ und z ist also ausgedrückt durch

$$\sigma \cdot dy = dz \text{ oder } \sigma = \frac{dz}{dy} \text{ oder } z = \int_0^y \sigma dy.$$

Die z-Linie wird leicht ermittelt, wenn man in den Teilungsgeraden der Spannungsflächen die Summe derselben von O bis y aufträgt und die erhaltenen Punkte zu einer Kurve DOE vereinigt (s. Fig. 15).

Die z'-Linie für die Eisenspannungsflächen ergibt sich wie folgt. Die Fläche z' des Trapezes der Eisenspannung, welche am unteren Querschnittsrande aufgetragen wird, ist (s. Fig. 14)

$$z' = uv \qquad u = (x - b) \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$v = \frac{d}{H} \cdot \mathfrak{H}, \qquad x = \frac{h}{H} \cdot \mathfrak{H},$$

demnach $z' = \frac{d}{H} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \mathfrak{H} \left(\mathfrak{H} \cdot \frac{h}{H} - b \right) \cdots$ Gl. einer Parabel.

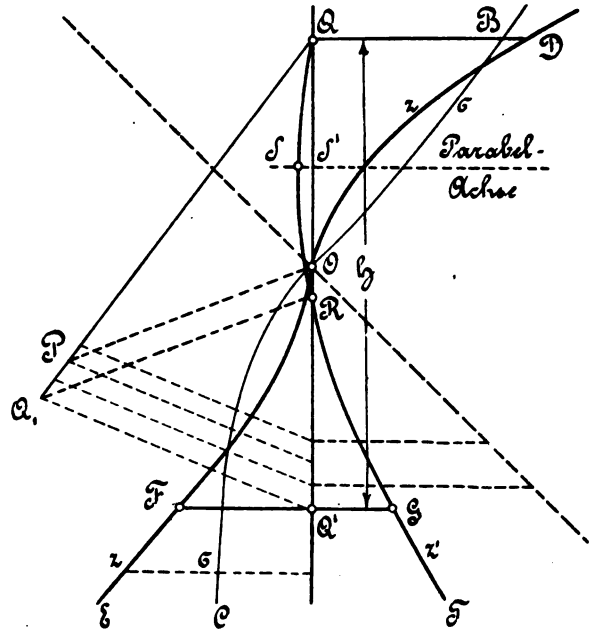


Fig. 15.

Für $\mathfrak{H} = 0$ ist $z' = 0$, für $\mathfrak{H} = \frac{H}{h} \cdot b$ ist $z' = 0$

und für $\mathfrak{H} = \frac{H}{h} \cdot \frac{b}{2}$ ist $z' = -\frac{d}{H} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{H}{h} \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}$,

also $z' = -\frac{d}{h} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{b^2}{4}$.

Die Parabel der Eisenspannungsflächen hat ihren Scheitel in S. Die Koordinaten desselben sind;

$$QS' = \mathfrak{H}_s = \frac{H}{h} \cdot \frac{b}{2} = \frac{QR}{2} \text{ und } S'S = z_s' = -\frac{d}{h} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{b^2}{4};$$

sie geht durch die Punkte Q und R. (Fig. 15.)

Die Parabel kann also konstruiert werden, wenn man die Punkte R und S' durch Zeichnung ($Q_1 R \parallel PO$) und $S'S$ rechnerisch ermittelt hat. Liegen die Punkte Q, S und R zu nahe beisammen, so kann noch ein Parabelpunkt aufgesucht werden, dessen Koordinaten sind:

$$\mathfrak{y} = 2\,\overline{QR} \text{ und } z' = 8\,\overline{SS'}.$$

Für jede gegebene Entfernung OQ sowie für jede Eisenspannungslinie ist die Parabel $QSRT$ besonders aufzufinden.

Hat man die z-Linien für die Beton- und die z'-Parabel für die Eisenspannungsflächen konstruiert, so ist die Druckspannungsfläche gleich den Zugspannungsflächen, wenn

$$\overline{QD} = \overline{FG} \text{ gemacht wird.}$$

Unterzieht man sich daher der Mühe, die z- und z'-Linien zu zeichnen, so können zusammengehörige Spannungsflächen direkt und ohne Versuche gefunden werden.

Die Benutzung dieser Kurven hat des weiteren den Vorteil, daß die Größe beliebiger Flächenteile sofort abgegriffen werden kann. Ihre Anwendung ist auch bei beiderseits armierten Querschnitten, sowie bei der Untersuchung der Spannungen aus Momenten und Normalkräften (II. Abschnitt) von Nutzen.

β) Einfluß der Lage und Gestalt des Eisenquerschnittes.

Aus der bildlichen Spannungsermittlung ist deutlich der Einfluß des Abstandes der Eiseneinlage vom Rande, der Einfluß der Höhe, wie überhaupt der Gestalt der Einlage ersichtlich. Die Spannungsfläche eines rechteckigen Eisenquerschnittes ist hiernach ein Trapez, dessen Schwerpunktsabstand für die Momentengröße maßgebend ist. Die Entfernung der Schwerpunkte von Eisenfläche und Spannungstrapez gibt ein Maß des Trägheitsmoments der Eisenfläche bezüglich ihrer Schwerachse.

24. Vernachlässigung des Trägheitsmoments der Eisenfläche.

Ist die Eisenfläche von verhältnismäßig geringer Höhe, wie bei Rundeisen, kleinen Walzprofilen, so kann man jene Entfernung vernachlässigen und daher bloß den Abstand a und den Armierungsgehalt bezüglich der ganzen Betonfläche einführen, wobei für die Zeichnung ein feststehendes Verhältnis $\frac{H}{d} = \nu$ anzunehmen ist. Der Anteil des Eisens an der ganzen Querschnittsfläche beträgt dann

$$\frac{f_e}{f_B} = \frac{f_e}{\frac{H}{d} \cdot dB} = \frac{f_e}{\nu \cdot dB} = \frac{1}{\nu} \varkappa = \mu.$$

In den graphischen Ermittlungen der Tafelfiguren 4—11 ist $\nu = 10$ angenommen. Der Prozentsatz der Armierung bezüglich der Querschnittsfläche beträgt dann

$$\frac{\varkappa}{10} \cdot 100\,\% = 10 \cdot \varkappa\,\% = \mu\,\%.$$

25. Berücksichtigung des Trägheitsmoments der Eisenfläche.

Wenn die Trägheitsmomente der Eisenflächen bezüglich ihrer Schwerachsen nicht mehr vernachlässigt werden können wie bei größeren Profilen (System Melan), so erfolgt die Ermittlung nach dem allgemeinen Verfahren.

Man zerlegt das eingelegte Eisenprofil in horizontale Abschnitte, für welche einzeln die Eisenspannungslinien entsprechend den Werten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ u. s. w. konstruiert werden. (Fig. 16.) Außerdem trägt man die Betonspannungskurven entsprechend den Werten $1, (1-\varkappa_1), (1-\varkappa_2)$, u. s. w. auf.

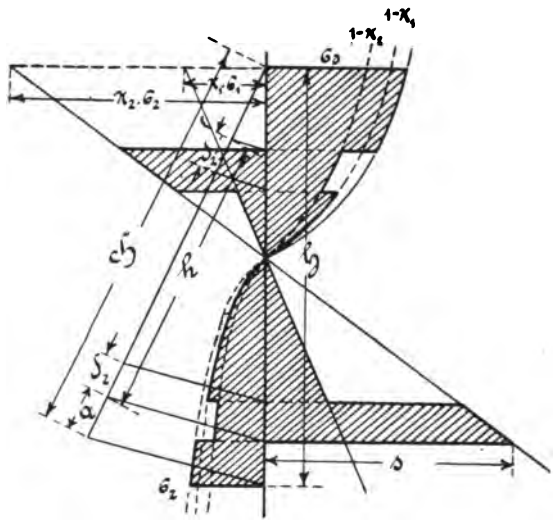


Fig. 16.

Es ist aus Fig. 17:

$$\varkappa_1 = \frac{\delta_1}{e},$$

$$\varkappa_2 = \frac{b}{e}.$$

Hat man durch Versuche die obere und untere Spannungsfläche gleichgemacht, so ergeben sich daraus die Randspannungen des Betons σ_d und σ_z, die größten Eisenspannungen $\sigma_e = \frac{s}{\varkappa_2}$ und das Moment der inneren Kräfte $\mathfrak{M}$ für die ideelle Balkenbreite 1 und die Höhe $\mathfrak{H}$. Daher ist

$$\overline{M} = m^2 \cdot AE \cdot B,$$

worin $m = \frac{H}{\mathfrak{H}}$ und B die Gesamtbalkenbreite bedeuten.

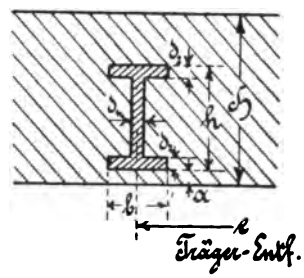


Fig. 17.

Da die Differenzen der vollen und reduzierten Betonspannungsflächen $(1 - \varkappa_1)$, $(1 - \varkappa_2)$ klein sind, können sie auch in diesem Falle vernachlässigt werden.

γ) Die Spannungen im armierten Plattenbalken.

26. Die Spannungskurven. (Fig. 18 und 19.)

Anschließend an die Darlegungen in Abs. 9 und 21 ergibt sich die Ermittlung der Spannungen im Plattenbalken von selbst, wenn man die bezüglichen Spannungskurven des Eisens und des Betons für 1, $1 - \varkappa$ und n konstruiert hat.

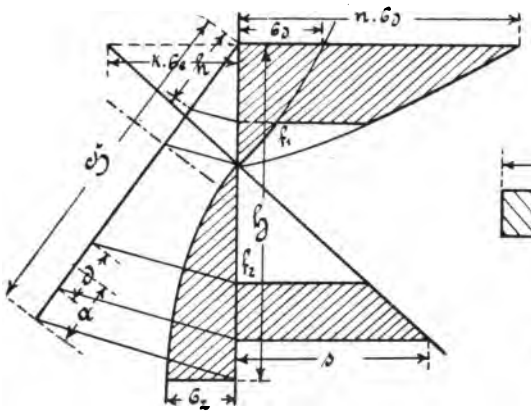


Fig. 18.

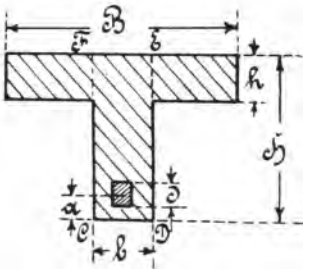


Fig. 19.

Hierbei ist

$$n = \frac{B}{b},$$

$$\varkappa = \frac{f_e}{bd} \text{ oder } \frac{f_e \cdot \nu}{b\ H} = \frac{f_e \cdot \nu}{f_B} = \frac{f_e}{f_B} \cdot \nu = \nu \cdot \mu.$$

f_e bedeutet den Eisenquerschnitt,

f_B den Betonquerschnitt $CDEF$,

$$\nu = \frac{H}{d}.$$

Nachdem $f_1 = f_2$ gemacht worden, sind die Spannungen σ_d, σ_z und $\sigma_e = \frac{s}{\varkappa}$ aus der Figur zu entnehmen.

Bemerkung.

Der Plattenbalken wird nur dann als ein einheitlich wirkender Träger behandelt werden dürfen, wenn die Verhältnisse $B : b : H : h$ ge-

wisse Werte nicht überschreiten, weil andernfalls eine Übertragung der Spannungen auf die entfernter liegenden Querschnittsteile nicht mehr möglich sein wird. Es dürfte dann rätlich sein, den Balken $CDEF$ (Fig. 19) als den allein tragenden Teil zu behandeln (s. Z. f. A. u. I. 1901, Seite 154, Fig. 13), bezw. nur einen angemessenen Teil der Platte mit einzubeziehen (selbe Zeitschrift, S. 153, Fig. 11). Beim Plattenbalken wird die zulässige Zugspannung des Eisens und Betons in der Regel früher erreicht als die erlaubte Druckspannung des Betons.

Eine ausführliche Untersuchung eines armierten Plattenbalkens (System Hennebique) wird in den Tafelfiguren 12—22 gebracht.

c) Ideelle Spannungen, Querschnitte, Elastizitätsziffern, Trägheits- und Widerstandsmomente.

α) Berechnung.

27. Gedachte Spannungsverteilung für die Druck- und Zugzone. (Fig. 20.)

Wir ersetzen die Spannungsfläche $OBC = f_1$ durch ein Dreieck, dessen Moment jenem der Spannungsfläche (bezogen auf die Nullinie) gleich ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns OBC durch ein flächengleiches Dreieck ODE substituiert, dessen Höhe $OD = \frac{3}{2} a_1$ und dessen Schwerpunkt daher den Abstand a_1 hat. Das Moment von ODE ist also ebenfalls $f_1 \cdot a_1$. Wir bilden sodann ein neues Dreieck $OBF = f'$, dessen Höhe e_1 und dessen Grundlinie $BF = k_1$ ist, derart, daß sein Moment dem früheren gleichbleibt. Es ist demnach:

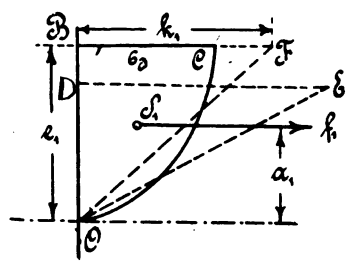


Fig. 20.

$$f_1 \cdot a_1 = f' \cdot \frac{2}{3} e_1, \text{ sonach}$$

$$f' = f_1 \cdot \frac{3 a_1}{2 e_1}. \text{ Ferner}$$

$$\frac{k_1 \cdot e_1}{2} = f_1 \cdot \frac{3 a_1}{2 e_1}; \text{ hieraus ist}$$

$$k_1 = f_1 \frac{3 a_1}{e_1^2} \quad (1.).$$

Analog ergibt sich für den unteren Teil der Spannungsflächen:

$$k_2 = f_2 \cdot \frac{3 a_2}{e_2^2} \quad (2.),$$

k_1 und k_2 sind gedachte Spannungen, welche auftreten würden, falls die

Spannungsverteilung im Zug- und Druckteil durch je eine Gerade ausgedrückt wäre und falls die Nullinie in ihrer wahren Lage belassen gedacht wird.

28. Ersatz durch geradlinige Spannungsverteilung. (Fig. 21.)

Wir führen eine obere Spannung k_1' und eine untere Spannung k_2' mit dem geradlinigen Spannungsverlauf LOK ein, so daß die auftretenden Momente in Bezug auf die Nullinie den Momenten der wirklichen Spannungen gleich sind.

$$\frac{k_1' e_1}{2} \cdot \frac{2e_1}{3} + \frac{k_2' e_2}{2} \cdot \frac{2e_2}{3} = f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 = AE,$$

wenn E die Polentfernung im Kräfteplan und A den Abstand der Endstrahlen im Seileck bedeutet (s. Abs. 7)

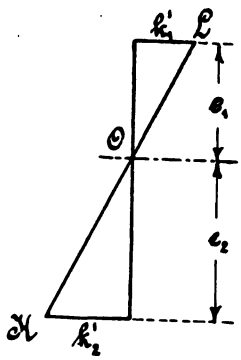


Fig. 21.

$$\frac{k_1' e_1^2}{3} + \frac{k_2' e_2^2}{3} = AE. \qquad \text{(a.)}$$

Nun ist aber $k_2' = k_1' \frac{e_2}{e_1}$; setzen wir diesen Wert in (a) ein:

$$\frac{k_1' e_1^2}{2} + \frac{k_1' e_2^2}{e_1} \cdot \frac{e_2^2}{3} = AE; \quad \text{daraus}$$

$$k_1' = \frac{3e_1 \cdot AE}{e_1^3 + e_2^3} \quad \text{(3.)}, \quad \text{analog:}$$

$$k_2' = \frac{3e_2 \cdot AE}{e_1^3 + e_2^3}. \quad \text{(4.)}$$

Die Gleichungen (3.) und (4.) geben gedachte Randspannungen, wenn der Spannungsverlauf geradlinig wäre. Sie erfüllen die Bedingung, daß ihre Momente bezüglich der Nullinie den wirklichen Momenten gleich sind.

29. Ideelle Biegungsspannungen.

Denken wir uns eine gleichmäßige Verteilung der Spannungen über die beiden Hälften des rechteckigen Querschnitts, wobei die Randspannungen k heißen mögen, so daß das Moment jenem der wirklichen Spannungen gleich ist, so erhalten wir:

$$2 \frac{k \cdot \frac{H}{2}}{2} \cdot \frac{2H}{2 \cdot 3} = A \cdot E, \text{ somit}$$

$$k = \frac{6 \cdot AE}{H^2}. \quad \text{(5.)}$$

Gl. (5.) stimmt mit der Biegungsgleichung $M = k\,W$ selbstverständlich überein. k ist die ideelle Biegungsspannung in einem Stab aus veränderlich elastischem Stoff. Kennt man sie für die einzelnen Bau-

materialien und gegebene, bekannte oder zulässige wirkliche Randspannungen, so kann die Dimensionierung des gebogenen Balkens nach der üblichen Biegungsgleichung erfolgen (s. Abs. 35 und 37).

30. Ideeller Querschnitt.

Die Spannungsverteilung nach Gl. (1.) und (2.) läßt sich auf einem Querschnitt denken, der die in der Figur 22 gezeichnete Gestalt hat.

$$k_4 = k_1 \cdot \frac{e_2}{e_1},$$

$$\frac{k_3}{k_1} = \frac{k_2}{k_4}, \text{ daraus ist}$$

$$k_3 = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_4} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot e_1}{k_1 \cdot e_2} = k_2 \frac{e_1}{e_2},$$

daher ist

$$b = 1 \cdot \frac{k_3}{k_1} = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{e_1}{e_2}. \quad (6.)$$

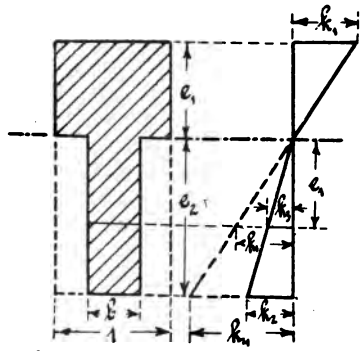


Fig. 22.

Durch Gl. (6.) ist der ideelle Querschnitt bestimmt. Zur Probe wird das Trägheitsmoment des ideellen Querschnittes und das k_1 und k_2 entsprechende Moment berechnet.

$$J = \frac{1}{3} e_1^3 + \cdot \frac{b}{3} e_2^3.$$

Nach Gl. (6.) ist $b = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{e_1}{e_2} = \frac{a_2}{e_1} \cdot \frac{e_1^3}{e_2^3}$; demnach

$$J = \frac{e_1^3}{3} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1}, \quad (7.)$$

$$W_1 = \frac{J}{e_1} = \frac{e_1^2}{3} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1},$$

$$M = k_1 W_1 = \frac{3 a_1 f}{e_1^2} \cdot \frac{e_1^2}{3} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1} = f : (a_1 + a_2) = AE,$$

$$W_2 = \frac{e_1^3}{2 e_2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{a_1},$$

$M = k_4 \cdot W_2$, nach Einsetzung entsteht wieder

$M = A \cdot E$.

31. Ideelles Trägheits- und Widerstandsmoment.

Für die gedachten Spannungen k_1 und k_2 Gl. (1.) und (2.) ist das Trägheitsmoment aus dem ideellen Querschnitt nach Abs. 30 zu entnehmen.

Für die Spannungen k_1' und k_2' nach Gl. (3.) und (4.) ist

$$M = k_1' W_1 = k_1' \frac{J}{e_1},$$

für M und k_1' die Werte eingesetzt, ergibt

$$J = \frac{1}{3}(e_1^3 + e_2^3). \quad (8.)$$

Derselbe West kann aus $M = k_2' W_2$ gewonnen werden; er stimmt mit dem Trägheitsmoment eines Rechteckes in Bezug auf eine Achse, deren Abstände von den Rändern e_1 und e_2 sind, überein.

Die Widerstandsmomente sind:

$$W_1 = \frac{1}{3e_1}(e_1^3 + e_2^3), \quad (9.)$$

$$W_2 = \frac{1}{3e_2}(e_1^3 + e_2^3). \quad (10.)$$

32. Ideelle Elastizitätsziffern.

Nach der Spannungsverteilung Gl. (3.) und (4.) sind die Dehnungen und Spannungen einander proportional. Diese Beziehung ist daher für die Ermittlung eines dem ganzen Querschnitt zukommenden gedachten Elastizitätsmaßes α geeignet. Dasselbe wird aus der einfachen Beziehung gewonnen (Fig. 23)

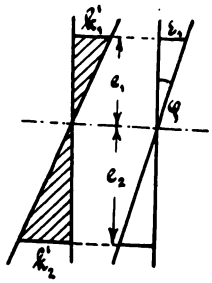


Fig. 23.

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{k_1'} = \frac{\varepsilon_2}{k_2'}. \quad (11.)$$

Hierin bedeuten ε_1 und ε_2 die den wirklichen Spannungen σ_d und σ_z zukommenden Längenänderungen, k_1' und k_2' die Spannungen nach Gl. (3.) und (4.) Es ist auch

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{k_1'} = \frac{1}{3AE} \cdot \frac{\varepsilon_1}{e_1} \cdot (e_1^3 + e_2^3).$$

Da $\frac{\varepsilon_1}{e_1} = \operatorname{tg} \varphi$, so erlangt α die Form:

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3AE}(e_1^3 + e_2^3). \quad (12.)$$

φ bedeutet den Verdrehungswinkel nach Abs. 3. α ist demnach wesentlich eine Funktion der Spannungen und der Verdrehung des Querschnitts, d. h. α ist abhängig von den äußeren Kräften und mit diesen von der variablen Stoffelastizität.

β) Konstruktion der Werte k_1', k_2', J, W_1, W_2 und α.

33. Spannungen, Trägheitsmomente und Elastizitätsmaße.

Aus Fig. 24 ist die Konstruktion der Spannungen

$$k_1' = \frac{3e_1 AE}{e_1^3 + e_2^3}, \quad k_2' = \frac{3e_2 AE}{e_1^3 + e_2^3} \text{ ersichtlich.}$$

Man macht $\overline{OA} = e_1$,

$\overline{OB} = e_2$,

$\overline{OC} = OD =$ der Einheit (z. B. 1 dm = 10 cm),

dann ist $\overline{OF} = \frac{e_1^3}{100}$,

$\overline{OE} = \frac{e_2^3}{100}$, daher

$\overline{EF} = \frac{1}{100}(e_1^3 + e_2^3)$.

Ferner wird $\overline{FG} = \frac{A \cdot E}{100}$, $\overline{EH} = 3e_1$, $\overline{EL} = 3e_2$ aufgetragen;

dann ist $\overline{HK} = k_1'$ und $\overline{LM} = k_2'$.

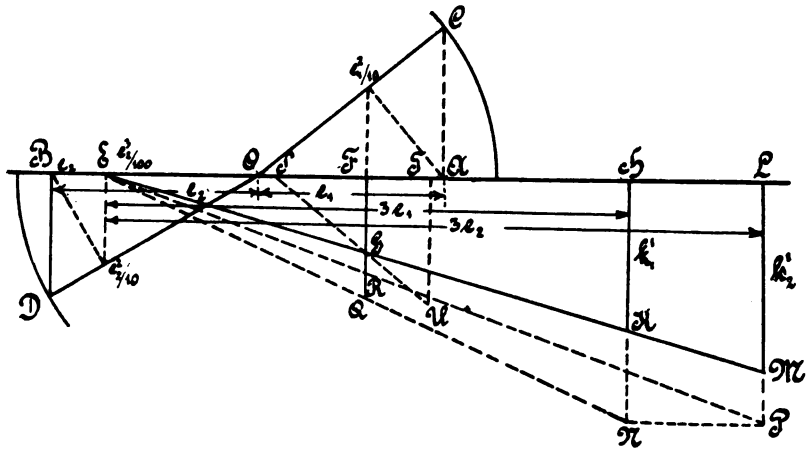


Fig. 24.

Das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{3}(e_1^3 + e_2^3) = \frac{100}{3} \cdot \overline{EF}$.

Zur Auffindung von W_1 und W_2 macht man

$\overline{HN} = \overline{LP} = 10$, dann ist

$W_1 = 100 \cdot \overline{FQ}$ und

$W_2 = 100 \cdot \overline{FR}$. (Fig. 24.)

Für die Konstruktion des ideellen Elastizitätsmaßes des Querschnitts

$$\alpha = \frac{J \cdot \operatorname{tg} \varphi}{A \cdot E}$$

trägt man in der Fig. 24

$$\overline{TU} = 100000 \cdot \varepsilon = \frac{10 \cdot 100000 \cdot \varepsilon}{e = 10} = 100000 \operatorname{tg} \varphi \text{ auf.}$$

Wenn $\overline{SF} = \frac{J}{100}$, dann ist

$$\alpha = \frac{1}{100000} \cdot \overline{ST}.$$

34. Das Elastizitätsmaß für unendlich kleine Spannungen, d. i. für den spannungslosen Zustand, erhalten wir, wenn in O (Fig. 25 und 26) an die Spannungskurven Tangenten gelegt werden, die sonach den Spannungsverlauf für den Beginn der Beanspruchungen ergeben.

QQ' ist die Querschnittslinie, VL die Verdrehungslinie, BS die Betonkurve, TT_1 sind die Tangenten in O, ES' ist die Eisenkurve.

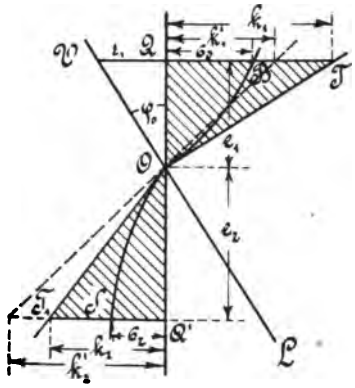


Fig. 25.

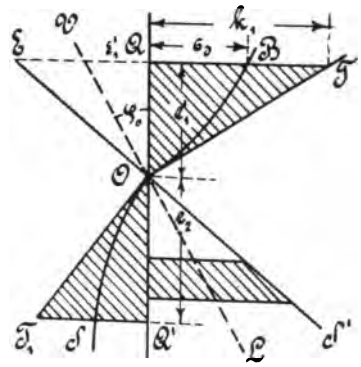


Fig. 26.

Fig. 25 gibt das Bild des Spannungsbeginns für den nichtarmierten, Fig. 26 für den armierten Beton, wobei die Spannungen und Verdrehungen unendlich klein zu denken sind.

Konstruiert man zu den Spannungsflächen die Momente $A_o \cdot E$ und $A_o' \cdot E$, so kann man die ideellen Elastizitätsmaße α_o (für den nichtarmierten) und α_o' (für den armierten Beton) in derselben Weise wie früher finden:

$$\alpha_o = \frac{J_o \cdot \operatorname{tg} \varphi_o}{A_o \cdot E},$$

$$\alpha_o' = \frac{J_o' \operatorname{tg} \varphi_o'}{A_o \cdot E}.$$

Es bedeuten $J_o = \frac{1}{3}(e_1^3 + e_2^3)$, $\quad J_o' = \frac{1}{3}(e_1'^3 + e_2'^3)$

$$\operatorname{tg} \varphi_o = \frac{\varepsilon_1}{e_1}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_o' = \frac{\varepsilon_1'}{e_1'}.$$

Setzt man für $\varepsilon_1 \ldots 10^6 \cdot \varepsilon_1$, für $e_1 \ldots 10$, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_o = 10^5 \cdot \varepsilon_1,$$

für $J_o \ldots \frac{J_o}{100}$,

„ $A_o \cdot E \ldots \frac{A_o \cdot E}{100}$, dann ist aus Fig. 24

$$\alpha_o = \frac{\overline{ST}}{10^5}.$$

Aus dem Vergleich der Werte α, α_o und α_o' ist zu ersehen, daß

$$\alpha > \alpha_o > \alpha_o',$$

d. h. die Armierung vermindert, die Spannungen erhöhen das Elastizitätsmaß.

d) Erläuterungen der Tafelfiguren 4—11, Ergebnisse daraus und Anwendungen.

35. Erklärung der Tafelfiguren.

Die T.-Fig. 4—11 betreffen Studien über die Spannungen und Elastizitätskoeffizienten in armierten Betonträgern von rechteckigem Querschnitt mit unterer Eiseneinlage.

Die T.-Fig. 4 stellt einen rechteckigen Betoneisenbalken im wirklichen und im theoretischen Querschnitt mit der Eiseneinlage $d \cdot \varkappa$ dar.

T.-Fig. 5 bringt den wirklichen Längs- und den theoretischen Querschnitt des in T.-Fig. 6 behandelten Betoneisenbalkens zur Anschauung.

T.-Fig. 6 zeigt unter Zugrundelegung der Considèreschen Betonkurve (Kurve 10, T.-Fig. 1) die Spannungen und deren Momente für einen Abstand des Schwerpunktes der Eiseneinlage vom unteren Rand $a = \frac{H}{10}$, für die Armierungsstärken $\varkappa = 0$, 0,1, 0,2 und 0,3 bei $50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ zulässiger Betondruckspannung und bei der Annahme $d = \frac{H}{10}$, also $\nu = 10$. μ ist also 0,01, 0,02 und 0,03, bezw. 1, 2 und 3%.

In T.-Fig. 7 sind aus den Spannungsflächen und deren Momenten, welche in T.-Fig. 6 dargestellt sind, die ideellen Biegungsspannungen k_I, k_{II} und k_{III} nach der Beziehung $k = \frac{M}{W} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{1}{6}\mathfrak{H}^2}$ ermittelt.

In T.-Fig. 8 wurden die ideellen Biegungsspannungen k_I, k_{II} und k_{III} aus den in den Figuren nicht gezeichneten Spannungsflächen und deren Momenten bei Nichtberücksichtigung der Betonzugspannungen konstruiert.

Aus der T.-Fig. 9 sind die nach der Beziehung $\alpha = \frac{\varepsilon_1}{k_1'}$ ermittelten Elastizitätsziffern zu entnehmen.

Darnach ist in dem betrachteten Querschnitt bei 50 kg Druckspannung

für $\varkappa = 0{,}3$ die ideelle Elastizitätsziffer $\alpha_{III} = 3 \cdot 10^{-6}$ oder $E_{III} = 333000$
„ $\varkappa = 0{,}2$ „ $\alpha_{II} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ „ $E_{II} = 286000$
„ $\varkappa = 0{,}1$ „ $\alpha_{I} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ „ $E_{I} = 217000$
„ $\varkappa = 0$ (reiner Beton) „ $\alpha = 9{,}5 \cdot 10^{-6}$ „ $E = 105000$
Bei der Spannung 0 in reinem Beton $\alpha_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ „ $E_0 = 333000$

Die Konstruktion von ideellen Trägheitsmomenten, Spannungen und Dehnungsziffern für die Armierungen $\varkappa = 0$, 0,1, 0,2 und 0,3 wird in T.-Fig. 10 gegeben. Die erhaltenen Spannungen k_1' und k_2' sind in T.-Fig. 6 eingetragen.

Die Ergebnisse aus den T.-Fig. 7 und 8 (ideelle Biegungsspannungen) für das Verhältnis $\frac{H}{a} = 10$ sind für $\frac{H}{a} = 5$ und $\frac{H}{a} = 15$ ergänzt und in T.-Fig. 11 in räumlicher Darstellung zu mehreren Linien zusammengestellt. Die horizontalen Abszissen bedeuten die Prozentsätze des Eisens 0 bis 3 ($\varkappa = 0$ bis 0,3 für $\nu = \frac{H}{d} = 10$), die schrägen geben die Eisenlage $\frac{H}{a}$ und die vertikalen Ordinaten die ideellen Biegungsspanuungen an. Darnach ist es möglich, jeden auf Biegung beanspruchten Betonbalken von rechteckigem Querschnitt mit unterer Eiseneinlage, deren Höhe nicht groß ist, zu dimensionieren, bezw. dessen Tragfähigkeit nach der Biegungsgleichung $M = k W$ zu ermitteln, sofern auf den Beton die gemachten Voraussetzungen — Betonkurve, zulässige Spannungen etc. — passen.

Die Beton- und Eisenspannungen mit und ohne Berücksichtigung der Betonzugspannungen, die Lage der Nullinie etc., welche Maße sich aus der Tafel-Fig. 6 für $\frac{H}{a} = 10$ und ferner für $\frac{H}{a} = 5$ und $\frac{H}{a} = 15$ ergeben, sind aus der auf S. 35 folgenden Tabelle zu entnehmen.

36. Berechnung von Balken mit Hilfe T.-Fig. 11.

1. Welche gleichmäßige Last kann ein Betonbalken mit dem skizzierten Querschnitt (Fig. 27) und 5 m Auflagerentfernung sicher tragen?

$$a = 3 + (3{,}9 - 2{,}8) = 4{,}1 \text{ cm},$$
$$\frac{H}{a} = \frac{40}{4{,}1} = 10,$$
$$f_e = 3 \cdot 4{,}98 = 14{,}98 \text{ cm}^2,$$
$$f_B = 25 \cdot 40 = 1000 \text{ cm}^2,$$
$$\mu = \frac{f_e}{f_B} = \frac{14{,}98}{1000} = 0{,}015 = 1\,^1/_2\,\% \text{ oder } \varkappa = 0{,}15.$$

Tabelle III.

$H:a$		1	5			10			15	
x		0	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3
mit Betonzugspannungen	σ_z	18,7	17,9	17,7	17,1	17,8	17,3	16,9	17,6	16,8
	σ_d	50	50	50	50	50	50	50	50	50
	σ_e	—	355	295	260	410	340	290	430	310
	$\frac{e_1}{e_2}$	0,53	0,67	0,80	0,88	0,72	0,87	0,98	0,73	1,02
	$\mathfrak{H}$	19,0	16,2	14,8	14,1	15,8	14,2	13,3	15,6	13,1
	A	21,3	18,6	17,3	16,5	19,3	17,8	16,9	19,5	17,0
	E	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	$f_1 = f_2$	18,9	18,9	18,9	18,9	18,9	18,9	18,9	18,9	18,9
	a_1	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3	4,3
	a_2	7,0	5,5	4,9	4,4	5,9	5,2	4,6	6,0	4,7
	k	35,4	42,5	47,4	49,9	46,4	53,0	57,0	46,1	59,5
ohne Betonzugspannungen	σ_d	—	50	50	50	50	50	50	50	50
	σ_e	—	790	530	410	830	555	435	840	410
	$\frac{e_1}{e_2}$	—	0,33	0,49	0,61	0,37	0,54	0,69	0,38	0,78
	$\mathfrak{H}$	—	26.2	20,1	17,4	24,4	18.8	16,1	23,9	15,1
	k		32	39	48	37	47	54	39	58

Mit den Werten $\frac{H}{a} = 10$ und $\frac{f_e}{f_B} = 1\,{}^1/_2\,\%$ erhält man aus T.-Fig. 11 eine ideelle Biegungsspannung

$$k = 50\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2};$$

daher $M = k \cdot W = 50 \cdot \frac{1}{6}\, 25 \cdot 40^2 = 330\,000$ cm/kg.

Daraus die Tragkraft

$$Q = \frac{M \cdot 8}{l} = \frac{330\,000 \cdot 8}{500} = 5280 \text{ kg}.$$

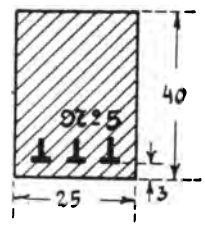


Fig. 27.

Abzüglich des Eigengewichtes von 1250 kg kann die Nutzlast 4030 kg betragen.

2. Welche Dicke muß eine zwischen 3 m entfernten Trägern liegende Betonplatte erhalten, wenn die überlagernde Last 800 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ beträgt und die Armierung 0,65 % stark sein soll.

Annahme $\frac{H}{a} = 10$, Plattengewicht $Q = 350\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

Der Armierung 0,65 % und $\frac{H}{a} = 10$ entspricht ein

$$k = 44 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Demnach $M = 44 \cdot \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot x^2 = \frac{1}{8} (8{,}00 + 3{,}50) \cdot 300^2$.

Daraus die Plattendicke $x = 13{,}2$ cm.

Dieser entspricht ein Gewicht $Q' = 1{,}0^2 \cdot 0{,}132 \cdot 2{,}5 = 0{,}33$ t. Nehmen wir 10 mm dicke Rundeisenstäbe als Armierung an, so ist deren Entfernung e aus der Beziehung zu finden

$$\frac{f_e}{f_B} = 0{,}0065$$

$$\frac{0{,}78}{13{,}2 \cdot e} = 0{,}0065.$$

Demnach $e = 9{,}1$ cm.

3. Wie stark muß eine 8 cm dicke Betondecke, welche zwischen 2 m entfernten I-Trägern liegt, armiert werden, damit sie befähigt wird, eine Nutzlast von 700 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ zu tragen. Die Betonzugspannungen sollen nicht berücksichtigt werden.

Eigengewicht der Decke $0{,}08 \cdot 1^2 \cdot 2{,}5 = 0{,}2$ t
Fußboden mit Belag $= 0{,}1$ „
Nutzlast $= 0{,}7$ „
Gesamtbelastung $= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$.

$$M = k \cdot \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 8^2 = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 200^2.$$

Hieraus $k = 46{,}9 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Aus T.-Fig. 11 ergibt sich für $\frac{H}{a} = 10$ die Spannung $k = 46{,}9$, wenn $\varkappa = 0{,}20$ ist, d. h. der Prozentsatz der Armierung muß 2,0 % betragen.

Es ist $\frac{f_e}{f_B} = 0{,}02$; wenn 12 mm starke Eisendrähte angeordnet werden, ist

$$\frac{1{,}13}{8 \cdot e} = 0{,}02,$$

hieraus ist $e = 7{,}0$ cm.

Zieht man die Betonzugspannungen in Betracht, dann genügt nach T.-Fig. 11 eine 1,1 % Armierung.

e) Formeln zur Bestimmung der Spannungen und der Abmessungen armierter Balken.

37. Allgemeines über die Aufstellung der Formeln.

Wenn mit Hilfe der Spannungslinien des Betons und Eisens für verschiedene Höchstspannungen des Betons und Eisens, sowie für mehrere Armierungsgehalte auf graphischem Wege die Momente der inneren Spannungen bestimmt worden sind, so ist es möglich, die Beziehung zwischen σ_d, σ_s, σ_e, $\varkappa$ und k durch eine Gleichung auszudrücken, mit deren Hilfe je eine von diesen Größen aus den andern ermittelt werden können. Hierzu käme noch die Lage der Armierung, d. i. die Entfernung a der Schwerachse der Eiseneinlage vom Rande. Da bei praktischen Ausführungen in der Regel a von $\frac{H}{8}$ nicht sehr abweicht, so wird es angebracht erscheinen, die Beziehung zwischen den Spannungen und Armierungen für $a = \frac{H}{8}$ aufzustellen, um durch Variation von a den Zusammenhang der in Frage kommenden Faktoren nicht noch weiter zu komplizieren.

Um einen einfachen Zusammenhang der ideellen Biegungs-Spannungen mit dem Armierungsgehalt und den Randpressungen des Betons sowie den Zugspannungen des Eisens — diese beiden Werte sind das Maßgebende — zu erhalten, führen wir eine Reihe von Untersuchungen mit den Prozentsätzen der Armierung 0, 1 und 2 ($\varkappa = 0$, 0,1 und 0,2) durch, wobei jedoch auch für den Eisengehalt 0 der Beton die Eigenschaft der Armierung haben soll. Kräftigere Einlagen als 2 % der Betonquerschnittsfläche kommen seltener vor, gewöhnlich betragen sie $^1/_2$ bis 2 %.

Bedeutungsvoll ist die Höhe der zugelassenen Pressungen im Beton. Je höher dieselben sind, desto größer wird die Zuganstrengung des Eisens, während bei niederen Druckspannungen das Eisen eine mehr indirekte Rolle spielt, die darin besteht, daß der Betonbalken überhaupt mit einem gewissen Sicherheitsgrad biegungsfähig wird. Die üblichen Betondruckspannungen schwanken zwischen 30 und 50 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

α) Die Formeln bei Berücksichtigung der Betonzugspannungen.

38. Der einseitig armierte rechteckige Querschnitt.

Wir bestimmen mit den Variationen $\varkappa$ und σ_d eine Anzahl Spannungsflächen und deren Momente, aus denen die ideellen Biegungsspan-

nungen $k = \frac{M}{W} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{1}{6} \cdot \mathfrak{H}^2}$ ausgerechnet werden. Hierbei ist $\mathfrak{M} = A \cdot E$ und $\mathfrak{H}$ die Querschnittshöhe aus der graphischen Untersuchung.

In Fig. 28 sind mit den Abszissen $\mu = 0$, 1, 2 und 3% (entsprechend den Werten $\varkappa = 0$, 0,1, 0,2 und 0,3) und den Ordinaten k für $\sigma_d = 51$ und 27,5 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ zwei Linienpaare dargestellt. Aus denselben ist ersichtlich, daß die ideellen Biegungsspannungen mit zunehmender Armierung, aber langsamer als diese, wachsen; ferner daß dieselben für schwache Armierung unter der Druckspannung des Betons bleiben, bei kräftiger Armierung diese übersteigen. Für Armierungen zwischen 1 und 2% sind die Druckspannungen und die ideellen Biegungsspannungen nahezu gleich. Für mittelkräftige Armierung kann daher eine armierte Betonplatte annähernd nach der gewöhnlichen Biegungsgleichung $M = k \cdot W$ berechnet werden, worin für $k = \sigma_d$ der zulässigen Druckspannung des Betons gesetzt wird.

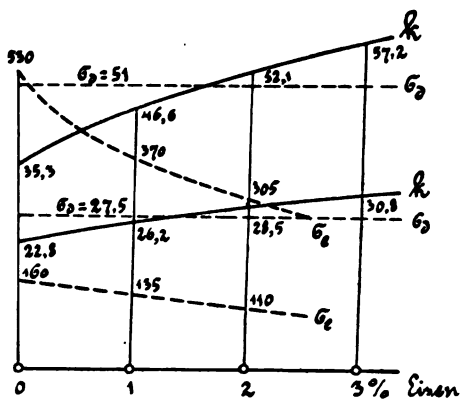


Fig. 28.

Mit verkürzten Ordinaten sind in der Fig. 28 auch die zu $\sigma_d = 51$ und 27,5 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ gehörigen Eisenspannungen eingetragen. Dieselben nehmen mit wachsender Armierungsstärke rasch ab. Sie sind für höhere Spannungen größer und betragen bei 27,5 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ Betondruck nur mehr $\sigma_e = 160$ bis etwa 100 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Hieraus ergibt sich, daß für rechteckige Querschnitte bei den üblichen Höchstspannungen eine Berechnung der Eisenspannungen behufs Dimensionierung oder Bestimmung der Tragfähigkeit nicht notwendig ist, da dieselben weit unter dem zulässigen Maß bleiben.

Zur Bestimmung einer einfachen Beziehung zwischen k, σ_d und μ substituieren wir zwischen den Punkten, welche den häufigst vorkommenden Abszissen $\mu = 1$ und 2 entsprechen, Geraden, deren Gleichungen

lauten: $$k = a \cdot \mu + b.$$

Hierin sind auch a und b bezüglich der Größe σ_d variabel.

Für $\sigma_d = 51$ ist

$$a = \frac{52{,}1 - 46{,}6}{1} = 5{,}5 \quad \text{und}$$

$$b = 46{,}6 - 5{,}5 = 41{,}1, \quad \text{also}$$

$$k = 5{,}5\ \mu + 41{,}1.$$

Für $\sigma_d' = 27{,}5$ ist

$$a' = \frac{28{,}5 - 26{,}2}{1} = 2{,}3 \quad \text{und}$$

$$b' = 26{,}2 - 2{,}3 = 23{,}9, \quad \text{also}$$

$$k' = 2{,}3\ \mu + 23{,}9.$$

Zwischen $a = 5{,}5$ und $a' = 2{,}3$ sowie zwischen $b = 41{,}1$ und $b' = 23{,}9$ interpolieren wir geradlinig nach $\sigma_d = 51$ und $\sigma_d' = 27{,}5$. Der Unterschied der σ_d ist $51 - 27{,}5 = 23{,}5$.

Einer Differenz der σ_d um 23,5 entspricht eine Differenz der a von $5{,}5 - 2{,}3 = 3{,}2$, demnach entspricht einer Differenz der σ_d um 1 eine Differenz der a von $\frac{3{,}2}{23{,}5} = 0{,}137$.

Einem Unterschied der σ_d um $(51 - \sigma_d)$ entspricht $0{,}137 \cdot (51 - \sigma_d)$ bei a, demnach ein $a = 5{,}5 - 0{,}137 \cdot (51 - \sigma_d)$.

In gleicher Weise erhalten wir den Wert

$$b = 41{,}1 - 0{,}732\ (51 - \sigma_d).$$

Wir erhalten also die ideelle Biegungsspannung

$$k = [5{,}5 - 0{,}137\ (51 - \sigma_d)] \cdot \mu + [41{,}1 - 0{,}732\ (51 - \sigma_d)]$$
$$= 3{,}77 + \mu\ (0{,}137\ \sigma_d - 1{,}487) + 0{,}732\ \sigma_d. \qquad (1.)$$

Aus der ideellen Biegungsspannung ist die Betonpressung

$$\sigma_d = \frac{k + 1{,}487 \cdot \mu - 3{,}77}{0{,}137 \cdot \mu + 0{,}732}. \qquad (2.)$$

Die Formel (1.) geht über in:

$$\left.\begin{aligned} k &= 40 + 5{,}4 \cdot \mu \text{ für } \sigma_d = 50\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ k &= 33 + 4{,}0 \cdot \mu \quad \text{„} \quad \text{„} = 40 \quad \text{„} \\ k &= 26 + 2{,}6 \cdot \mu \quad \text{„} \quad \text{„} = 30 \quad \text{„} \end{aligned}\right\} \qquad (1'.)$$

In gleicher Weise lassen sich die Eisenspannungen darstellen:

$$\sigma_e = -165 - \mu\ (1{,}8\ \sigma_d - 25) + 12\ \sigma_d. \qquad (3.)$$

Hieraus entsteht

$$\left.\begin{aligned} \sigma_e &= 435 - 65 \cdot \mu \text{ für } \sigma_d = 50\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ \sigma_e &= 315 - 47 \cdot \mu \quad \text{„} \quad \text{„} = 40 \quad \text{„} \quad \text{und} \\ \sigma_e &= 195 - 29 \cdot \mu \quad \text{„} \quad \text{„} = 30 \quad \text{„} \end{aligned}\right\} \qquad (3'.)$$

In diesen Formeln bedeutet μ den Prozentgehalt des Querschnitts an Eisen.

39. Beispiele.

1. Welches Biegungsmoment kann eine 10 cm dicke, unten mit 8 mm starkem, 12 cm entferntem Rundeisen armierte Betonplatte von 1 m Breite übertragen, wenn die Betondruckspannuug 40 $\frac{kg}{cm^2}$ erreichen darf?

$$f_e = \frac{100}{12} \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}8^2}{4} = 4{,}17 \text{ cm}^2,$$

$$f_B = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ cm}^2,$$

$$\mu = 100 \cdot \frac{4{,}17}{1000} = 0{,}417.$$

Nach der Formel (1′) ist

$$k = 33 + 4\,\mu = 33 + 4 \cdot 0{,}417 = 35 \frac{kg}{cm^2}; \text{ daher}$$

$$M = k \cdot W = 35 \cdot \frac{1}{6} 100 \cdot 10^2 = 58000 \text{ cmkg}.$$

Die Platte würde sich bei der gegebenen maximalen Spannung von 40 kg auf 4,30 m freitragen. Auf 2 m Länge könnte sie noch eine Last von 910 $\frac{kg}{m^2}$ mit genügender Sicherheit tragen. Die Eisenspannung wäre hierbei

$$\sigma_e = 315 - 4{,}7 \cdot \mu = 315 - 47 \cdot 0{,}417 = 285 \frac{kg}{cm^2}.$$

2. In Heft 8 d. öst. W. f. d. ö. B. 1902 gibt Haberkalt folgendes Beispiel: Platte von 1 m Breite, 12 cm Dicke, 10 cm entfernte, 10 mm dicke Eiseneinlagen. Größtes Moment 90000 cmkg. Welches sind die Spannungen?

$$f_e = 10 \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 7{,}8,$$

$$f_B = 100 \cdot 12 = 1200,$$

$$\mu = 100 \frac{7{,}8}{1200} = 0{,}65,$$

$$k = \frac{M}{W} = \frac{90000}{\frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 12^2} = 37{,}5 \frac{kg}{cm^2}.$$

Hieraus läßt sich σ_d nach der Formel (2.) berechnen:

$$\sigma_d = 42{,}3 \frac{kg}{cm^2}. \quad \text{(Haberkalt findet 44,9.)}$$

Die Eisenspannung ist nach Formel (3.) für $\sigma_d = 42{,}3$,

$\sigma_e = 310 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. (Haberkalt findet 287, Barkhausen 304.)

3. Armierte Platte, Breite $B = 100$, Dicke $H = 14$ cm, Armierung $\mu = 2{,}6\,\%$ (sehr kräftig), Biegungsmoment $M = 115000$ cmkg. Wie groß sind die Spannungen? (Aufgaben aus „Träger u. Stützen aus Beton und Eisen“ von Walter u. Weiske.)

$$k = \frac{M}{W} = \frac{115000}{\frac{1}{6} 100 \cdot 14^2} = 35.$$

Aus der Formel (2.) ist

$$\sigma_d = 32{,}2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ und nach (3.)}$$

$$\sigma_e = -165 + 2{,}6\,(25 - 1{,}8 \cdot 32{,}2) + 12 \cdot 32{,}2 = 136 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Nach Walter u. Weiske sind $\sigma_d = 29{,}2$ ·

und $\sigma_e = 205{,}9$ (wohl zu hoch).

4. Betoneisenquerschnitt von 12 cm Dicke, 100 cm Breite und $1{,}67\,\%$ Armierung. Biegungsmoment $M = 96000$ cmkg. Welches sind die Spannungen? (Beispiel aus Dingl. pol. Jour. 1902, H. 46, Weiske).

Die ideelle Biegungsspannung ist

$$k = \frac{M}{W} = \frac{96000}{\frac{1}{6} 100 \cdot 12^2} = 40 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Hieraus ist nach Formel (2.)

$$\sigma_d = \frac{40 + 1{,}487 \cdot 1{,}67 - 3{,}77}{0{,}137 \cdot 1{,}67 + 0{,}732} = 40{,}3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

und nach Formel (3.)

$$\sigma_e = -165 + 1{,}67\,(25 - 1{,}8 \cdot 40{,}3) + 12 \cdot 40{,}3 = 271 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

(Nach der Berechnung des obigen Autors ist

$$\sigma_d = 40{,}1 \text{ und } \sigma_e = 346 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.)$$

40. Der beiderseits armierte Querschnitt.

Die im vorhergehenden entwickelten Annäherungsformeln gelten bezüglich der ideellen Biegungsspannungen ziemlich gut auch für beiderseits armierte Träger, wenn unter μ der Gesamtanteil des Eisens verstanden wird. Die unteren Eisen- und die Betonzugspannungen werden jedoch etwas höher, erstere um 15 bis $40\,\%$, und zwar ist die Mehrspannung um so größer, je stärker der Armierungsgehalt und je höher

die Beanspruchung des Materials ist. Es ist demnach vorteilhafter, das Eisen nur auf der Zugseite einzulegen, wie es in der Praxis meist üblich ist. Aus Fig. 29 können die Eisenspannungen σ_e und die ideellen Biegungsspannungen k für die Betondrücke $\sigma_d = 51$ und 27,5 entnommen werden. Aus derselben ist die annähernde Übereinstimmung bei beiderseits armierten Balken mit jenen bei einseitig armierten ersichtlich.

41. Der armierte Plattenbalken.

Für die üblichen Querschnittsverhältnisse und Armierungen geben die Formeln (1.) und (2.) noch brauchbare Resultate. In der Regel sind aber die ideellen Biegungsspannungen $k = \frac{M}{W}$ den Pressungen des Betons σ_d nahezu gleich, so daß man auch ohne Anwendung der Formeln (1.) und (2.) auszukommen vermag, um σ_d annähernd zu bestimmen. W bedeutet das Widerstandsmoment des T-Querschnitts bezüglich seiner Schwerachse für die obere Flanschkante. Dagegen sind die Spannungen σ_e des im unteren Stegteil eingelegten Eisens bedeutend höher, als die nach Formel (3.) berechneten.

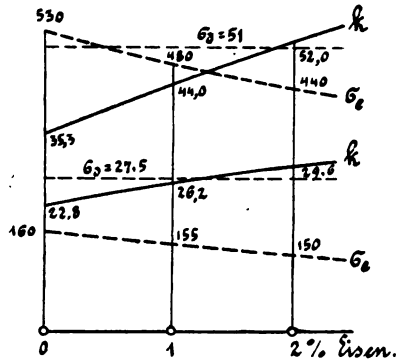


Fig. 29.

Bezeichnet man die Eisenspannungen im Plattenbalken mit σ_e, mit μ den Prozentgehalt des Gesamtquerschnitts an Eisen, mit σ_d die Druckspannung des Betons, so erhält man bei Betondruckspannungen $\sigma_d > 25$ einen angenäherten Wert für die Eisenspannungen aus der Beziehung:

$$\sigma_e = 3 \cdot [- 165 - \mu\,(1{,}8\,\sigma_d - 25) + 12\,\sigma_d], \qquad (4.)$$

oder $\sigma_e = 3\,\sigma_e'$, wenn σ_e' aus Formel (3.) zu entnehmen ist.

Beispiele.

1. Hennebique-Träger, Spannweite $l = 7{,}5$ m, Gesamtbelastung $q = 1060$ kg/m^2, Breite der Platte $B = 2{,}33$ m, Dicke derselben 0,09 m, Höhe des Steges 0,30, Breite desselben $b = 0{,}35$. Armierung 6 Rundeisen à 25 mm. (Beispiel von Barkhausen, Z. f. A. u. I. 1901, S. 150.) — Welches sind die Spannungen?

Biegungsmoment $M = \frac{1}{8}\ 1060 \cdot 7{,}5 \cdot 750 \cdot 2{,}33 = 1\,740\,510$ cmkg.

$$f_e = 6 \cdot 4{,}91 = 29{,}46 \text{ cm}^2,$$
$$f_B = 233 \cdot 9 + 35 \cdot 30 = 3147 \text{ cm}^2,$$
$$\mu = 100 \cdot \frac{29{,}46}{3147} = 0{,}94.$$

Schwerpunktsbestimmung:

$$233 \cdot 9 \times 4{,}5 + 30 \cdot 35 \times 24 = 3147 \cdot x$$
$$x = 11{,}0 \text{ cm vom oberen Rande.}$$

Widerstandsmoment des Plattenbalkens:

$$J = \frac{1}{12}(233 \cdot 9^3 + 35 \cdot 30^3) + 2097 \cdot 6{,}5^2 + 1050 \cdot 13^2 = 358953 \text{ cm}^4$$

$$w = \frac{J}{11{,}0} = 32632 \text{ cm}^3.$$

Die ideelle Biegungsspannung ist

$$k = \frac{M}{W} = \frac{1740510}{32632} = 53{,}6 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Druckspannung im Beton ist zu rechnen aus:

$$k = 3{,}77 + \mu\,(0{,}137\,\sigma_d - 1{,}487) + 0{,}732\,\sigma_d.$$

Für $k = 53{,}6$ und $\mu = 0{,}94$ ist

$$\underline{\sigma_d = 59{,}5 \text{ kg/cm}^2.}$$

Die Zugspannung im Eisen ergibt sich aus:

$$\sigma_e = 3\,[-165 - \mu\,(1{,}8\,\sigma_d - 25) + 12\,\sigma_d]. \qquad (4.)$$

Für $\mu = 0{,}94$, $\sigma_d = 59{,}5$ gesetzt, gibt

$$\underline{\sigma_e = 1415 \text{ kg/cm}^2.}$$

Der Berechnung Barkhausens sind zu Grunde gelegt

$$\sigma_d = 50,\ \sigma_e = 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

Die graphische Untersuchung ergibt

$$\sigma_d = 63,\ \sigma_e = 1430 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Armierter Plattenbalken. Plattenbreite $B = 100$, Plattendicke 5, Steghöhe 20, Stegdicke 25 cm. Armierung 4 Rundstäbe mit 23 mm Durchmesser. Wie groß ist das Moment für $\sigma_d = 30 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$? (Aufgabe aus „Träger u. Stützen aus Beton u. Eisen“ von Walter u. Weiske.)

Abstand des Schwerpunktes vom oberen Rand $s = 8{,}75$ cm

$$w = 6500 \text{ cm}^3$$
$$f_e = 16{,}6 \text{ cm}^2$$
$$f_B = 1000 \text{ cm}^2$$
$$\mu = 1{,}66.$$

Für $\sigma_d = 30$ ist nach der Formel (1.)

$$k = 30{,}3.$$

Somit ist $M = 6500 \cdot 30{,}3 = 197000$ cmkg.

Nach (4.) ist $\sigma_e = 338 \frac{kg}{cm^2}$.

Für ein Moment $M = 160000$ cmkg ist die ideelle Biegungsspannung

$$k = \frac{160000}{6500} = 24{,}6 \frac{kg}{cm^2}.$$

Nach Formel (2.) ist sonach

$$\sigma_d = 24{,}3 \frac{kg}{cm^2} \text{ und nach Formel (4.)}$$

$$\sigma_e = 286 \quad ,,$$

(Die bezüglichen Werte bei Weiske sind: $\sigma_d = 24{,}4$, $\sigma_e = 300$.)

3. Hennebique-Decke, Plattenbreite 410, Dicke 10, Steghöhe und Dicke 60 cm, Armierung 12 Rundeisen à 33 mm.

$$f_e = 12 \cdot \frac{\pi \cdot 3{,}3^2}{4} = 102{,}64 \text{ cm}^2$$

$$f_B = 410 \cdot 10 \cdot + 60 \cdot 60 = 7700 \text{ cm}^2$$

$$\mu = 100 \frac{f_e}{f_B} = 1{,}33\,\%.$$

Abstand des Schwerpunktes vom oberen Rand 21,4 cm.

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerachse ist

$$J = 3462359 \text{ cm}^4.$$

Das Widerstandsmoment für den Abstand 21,4 ist

$$w = \frac{3462359}{21{,}4} = 161800 \text{ cm}^3.$$

Für ein Moment $M = 4608000$ cmkg ist

$$k = \frac{M}{w} = \frac{4608000}{161800} = 28{,}5.$$

Diesem entspricht laut Formel (2.) ein

$$\sigma_d = 29{,}2 \text{ und nach Formel (4.) ein}$$

$$\sigma_e = 473 \frac{kg}{cm^2}.$$

(Nach der graphischen Untersuchung ist

$$\sigma_d = 27 \text{ und } \sigma_e = 490 \frac{kg}{cm^2}).$$

Für das Moment $M = 8260000$ cmkg ist

$$k = \frac{M}{w} = 51{,}0 \text{ und daraus nach Formel (2.) bezw. (4.)}$$

$\sigma_d = 53{,}8$ und $\sigma_e = 1155 \frac{kg}{cm^2}$ (gegen 50 und 1130 in der graphischen Untersuchung.)

Die Übereinstimmung der Formelergebnisse mit den genaueren Ermittlungen in den genannten Beispielen ist zwar nicht glänzend, doch immerhin befriedigend und noch besser als die Übereinstimmung der Rechnungsmethoden anderer Autoren. Jedenfalls können die Unterschiede infolge der verschiedenen Betonqualitäten noch bedeutender als die Differenzen der Rechnungsresultate nach den Formeln sein.

4. Betoneisenbalken von 28×50 cm Stegquerschnitt, 250 cm Plattenbreite, 10 cm Plattendicke, Armierung 10 Rundeisen à 28 mm. Biegungsmoment $M = 2860000$ cmkg (Dingl. pol. J. 1903, H. 49/50, Weiske).

$$f_e = 10 \frac{\pi \cdot 2{,}8^2}{4} = 61{,}58 \text{ cm}^2,$$

$$f_B = 250 \cdot 10 + 28 \cdot 50 = 3900 \text{ cm}^2,$$

$$\mu = 100 \frac{61{,}58}{3900} = 1{,}58\,\%,$$

$J = 1120200$ cm^4, Schwerpunktslage 15,8 cm vom oberen Rande,

$$w = \frac{1120200}{15{,}8} = 70900 \text{ cm}^3,$$

$$k = \frac{M}{w} = \frac{2860000}{70900} = 40{,}3 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach Formel (2.) ist $\sigma_d = 41$ kg/cm^2 und nach (4.) ist
$\sigma_e = 750$ „

β. Annahme eines wirkungslosen Betonzugquerschnittes.

42. Herleitung der Formeln.

Unter der Annahme verschiedener Armierungsverhältnisse und Betondruckspannungen bei Vernachlässigung der Betonzugspannungen, unter Zugrundelegung der Betondruck-Kurve 10 (T.-Fig. 1) und für die Eisenlage $a = \frac{H}{8}$ und $d = \frac{H}{10}$ ergeben sich folgende Werte für die Betonspannungen, das Armierungsverhältnis, die Eisenspannungen und die ideellen Biegungsspannungen des Querschnitts:

$\sigma_d =$	51,	51,	51,	35,	35,	35	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
$\sigma_e =$	390,	630,	740,	275,	450,	625	„
$\mu =$	3,0,	1,37,	0,93,	2,26,	1,05,	0,63	%
$k =$	50,7,	40,4,	35,3,	28,0,	22,9,	18,7	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Die Spannungen k und σ_d liefern als Ordinaten zu den Abszissen μ krumme Linien. Substituiert man für die mittleren Werte ($\mu = 0{,}7$

bis 2,0) Geraden, so lassen sich durch Interpolation nach σ_d wie früher Formeln aufstellen, welche für die üblichen Armierungssätze gelten. Darnach ist

$$k = 5{,}24 + \mu\,(0{,}461\,\sigma_d - 11{,}92) + 0{,}378\,\sigma_d \qquad (5.)$$

und

$$\sigma_d = \frac{k + 11{,}92 \cdot \mu - 5{,}24}{0{,}461 \cdot \mu + 0{,}378}. \qquad (6.)$$

Für die Betonpressung $\sigma_d = 50$ ist abgerundet $k = 24 + 11 \cdot \mu$

„ „ $= 40$ „ $k = 20 + 6{,}5 \cdot \mu$

„ „ $= 30$ „ $k = 16 + 2 \cdot \mu$ (5′.)

So wie für k und σ_d läßt sich für σ_e und σ_d eine Beziehung aufstellen. Dieselbe lautet:

$$\sigma_e = 23{,}17\,\sigma_d - 209{,}67 - \mu\,(6{,}59\,\sigma_d - 86). \qquad (7.)$$

Für $\sigma_d = 50$ wird $\sigma_e = 950 - 245\,\mu$

„ $\sigma_d = 40$ „ $\sigma_e = 720 - 178\,\mu$ (7′.)

43. Beispiele.

1. Wie groß ist die Tragfähigkeit einer 1 m breiten armierten Betonplatte von 2,0 m Spannweite, 10 cm Stärke und 1,8% Eisen, wenn die Betonzugfähigkeit vernachlässigt wird und die Randpressungen des Betons höchstens 40 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ betragen sollen.

Nach der Formel (5′.) ist

$$k = 20 + 6{,}5 \cdot \mu = 20 + 6{,}5 \cdot 1{,}8 = 31{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Das Biegungsmoment ist

$$M = \frac{Q' \cdot 200}{8} = 31{,}7 \cdot \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 10^2.$$

Daraus $Q' = 2110$ kg pro 1 m Breite.

Hiervon ab das Eigengewicht von 500 kg, verbleibt eine Tragfähigkeit von $Q = 2110 - 500 = 1610$ kg.

Die hierbei entstehende Eisenspannung ist nach der Formel (7′.)

$$\sigma_e = 720 - 178 \cdot 1{,}8 = 400\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

2. Ein Betonbalken System Hennebique von 4 m Spannweite und mit 2% Eisen soll in der Mitte eine Last $P = 500$ kg tragen. Die Betonzugzone soll als unwirksam, die Betonpressung mit 35 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ am Rande angenommen werden. — Der Balken ist zu dimensionieren.

Die ideelle Biegungsspannung für $\sigma_d = 35$ und $\mu = 2$ ergibt sich aus der Formel (5.) mit

$$k = 26{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Annahmen: Balkenbreite b: Balkenhöhe $h = 2 : 3$

$$b = \frac{2h}{3}.$$

Balkengewicht $Q = 600$ kg.

Das Biegungsmoment

$$M = \frac{1}{8} \cdot 600 \cdot 400 + \frac{1}{4} \cdot 500 \cdot 400 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2h}{3} \cdot h^2 \cdot 26{,}7.$$

Daraus ist $h^3 = 26970$,

$h = 30$ cm, also $b = 20$ cm.

Das Gewicht $Q = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 4 \cdot 2{,}4 = 576$ kg (gegen 600 kg der Annahme).

Die Eisenspannung berechnet sich aus der Formel (7.) mit

$$\sigma_e = 378 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die notwendige Eisenfläche beträgt

$$f_e = 0{,}02 \cdot f_B = 0{,}02 \cdot 600 = 12 \text{ cm}^2.$$

Die Armierung hat daher aus 4 je 20 mm dicken Rundeisen zu bestehen.

44. Vergleich der Spannungen mit und ohne Berücksichtigung der Betonzugspannungen.

Die ideelle Biegungsspannung mit Berücksichtigung der Betonzugspannung ist nach Formel (1.)

$$k = 3{,}77 + 0{,}137 \cdot \mu \cdot \sigma_d - 1{,}487\ \mu + 0{,}732\ \sigma_d.$$

Die Biegungsspannung bei Annahme eines wirkungslosen Betonzugquerschnittes ist nach Formel (5.)

$$k' = 5{,}24 + 0{,}461\ \mu \cdot \sigma_d - 11{,}92\ \mu + 0{,}378\ \sigma_d.$$

Der Unterschied beider Spannungen ist

$$k - k' = -1{,}47 - 0{,}324\ \mu \cdot \sigma_d + 10{,}43\ \mu + 0{,}354\ \sigma_d.$$

Für $\sigma_d = 50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ ist die Differenz $k - k' = 16{,}23 - 5{,}77\ \mu$

„ $\sigma_d = 40$ „ „ $k - k' = 12{,}69 - 2{,}53\ \mu$.

Die Differenz wird um so kleiner, je stärker die Armierung und je höher die Betonpressung ist.

Sie beträgt für

$\mu = 1$ u. $\sigma_d = 50$, $k - k' = 16{,}23 - 5{,}77 = 10{,}5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ oder 23% von $k = 45{,}4$

„ $= 1$ „ „ $= 40$, „ „ $= 12{,}69 - 2{,}53 = 10{,}2$ „ „ 27,5% „ „ $= 37$

„ $= 2$ „ „ $= 50$, „ „ $= 16{,}23 - 2 \cdot 2{,}77 = 4{,}7$ „ „ 9% „ „ $= 50{,}8$

„ $= 2$ „ „ $= 40$, „ „ $= 12{,}69 - 2 \cdot 2{,}53 = 7{,}6$ „ „ 18,6% „ „ $= 41$.

45. Zweck der Formeln.

Wenn der ausgeführte Beton ein anderer ist, als der, dessen Formänderungskurve der Ableitung der Formeln zu Grunde gelegt ist, so

ändern sich natürlich auch die auftretenden Beton- und Eisenspannungen. Ist insbesondere die Druckkurve des Betons, aus dem ein zu errichtendes Bauwerk hergestellt werden soll, flacher als die Considèresche Kurve, dann ist mit einer mäßigen Verringerung der Betondrücke eine Erhöhung der Eisenspannungen, also eine günstige Verschiebung der Spannungsverteilung, verbunden.

Da die Eisenspannungen in der Regel (bei rechteckigen Querschnitten stets) die zulässige Höchstspannung nicht erreichen, so geben die gebrachten Formeln vollständig zuverlässige Resultate zur Dimensionierung von auf Biegung beanspruchten Balken, ohne daß umständliche Berechnungen notwendig werden. Man könnte selbstverständlich an Stelle der substituierten Geraden eine krumme Linie, z. B. eine Parabel, einlegen, wodurch die Formeln genauer und nicht für mittlere Armierungen und Spannungen allein gültig gemacht wären.

Die Ausdrücke würden jedoch an Einfachheit so sehr verlieren, daß die Absicht zu schanden würde, sie für den täglichen Gebrauch anwendbar zu gestalten. Einfachheit und Allgemeinheit sind hier ebenso wie anderwärts Gegensätze, die einander Konzessionen machen müssen.

Mit der Aufstellung der Formeln soll natürlich keineswegs ausgesprochen werden, daß eine mit den vorhandenen graphischen oder analytischen Hilfsmitteln nach dieser oder jener Methode durchgeführte Rechnung, in welcher die Qualität des Betons, seine Festigkeit und Elastizitätsverhältnisse berücksichtigt werden können, entbehrlich wird. Diese wird vielmehr um so genauer und sorgfältiger durchgeführt werden müssen, je größer die Bedeutung des Bauwerks ist.

46. Der Streit um die Zugspannungen des Betons.

Die Frage, ob die Betonzugspannungen in Rechnung gestellt werden dürfen oder nicht, ist noch offen. Wenn die Einstampfung des Betons sehr sorgfältig und die Mischung gut und mörtelartig ist, wird die Antwort ja lauten müssen.

Bedeutungsvoll ist die Stärke der Armierung. Bei mittelkräftigen und starken Eiseneinlagen (also über 1% des Betonquerschnitts) wird die Berücksichtigung der Zugspannungen des Betons stets gerechtfertigt werden können, denn bei tatsächlichem Eintreten von Rissen werden sich vornehmlich die Eisenspannungen erhöhen und zwar bei rechteckigen Querschnitten von etwa 400 auf höchstens 800—900 $\frac{kg}{cm^2}$, also über die zulässige Anstrengung nicht hinaus. Im Plattenbalken spielen die Betonzugspannungen von vornherein keine große Rolle. Beim Rissigwerden des Betons wachsen selbstredend auch die Druckspannungen desselben, jedoch kaum mehr als 20%. (Vgl. die Tabelle der Spannungen etc. im Abs. 36.)

Bedenklich erscheint die Berücksichtigung der Zugspannungen des Betons bei sehr schwachen Armierungen, da im Falle des Rissigwerdens des Betons die Eisenspannungen leicht über die Proportionalitätsgrenze wachsen und infolgedessen die Betondruckspannungen eine gefährliche Höhe erreichen können. Unter Umständen kann die Berücksichtigung der Betonzugspannungen ungünstigere Beanspruchungsverhältnisse ergeben, als wenn die Betonzugzone wirkungslos gedacht würde (Abs. 90). Es wird demnach bei jedem Einzelfall zu erwägen sein, ob die Beachtung der Zugspannungen des Betons für die Sicherheit des Bauwerkes von Vor- oder Nachteil ist. Für approximative Berechnungen ist der Einfacheit halber die Zugzone wirkungslos anzunehmen (siehe folgende Absätze).

γ) Approximative Berechnung armierter Balken unter der Annahme proportionaler Druckspannungen im Beton.

47. Ableitung der Spannungsformeln bei Zugarmierung.

Bei Vernachlässigung der Betonzugspannungen und unter der Annahme proportionaler Betondruckspannungen ergeben sich im Plattenbalken die zusammengehörigen Spannungsflächen $OQB'FDO$ und $KEHG$ (Fig. 30). OB stellt die einfache, OB' die $n$fach verbreiterte Betonkurve, OE die Eisenspannungslinie für $\varkappa$ dar.

Es ist $QB' = x = n\sigma_b$ und $y = \varkappa \cdot \sigma_e$.

Ferner ist $\frac{e_1}{x} = \cot\alpha = c$, daher $e_1 = cx$

$$\frac{a_2}{y} = \cot\beta = g \quad \text{und} \quad a_2 = g \cdot y.$$

Unter Vernachlässigung der kleinen Fläche ODF ist die Druckspannungsfläche

$$f_1 = \frac{ex^2}{2}.$$

Die Zugspannungsfläche des Eisens ist

$$f_2 = y \cdot u = y \cdot \xi\,(e_1 + a_2),$$

worin ξ das Verhältnis der Breite u zur Querschnittshöhe $(e_1 + a_2)$ bedeutet, also

$$\xi = \frac{u}{e_1 + a_2} = \frac{d}{h}.$$

Des weiteren ist $f_2 = y \cdot \xi\,(cx + gy)$.

Da bei reiner Biegung $f_1 = f_2$, so wird

$$\frac{cx^2}{2} = \xi \cdot y\,(cx + gy).$$

Diese Gleichung gibt die Beziehung zwischen x und y, also auch zwischen σ_b und σ_e an. Es ist

$$y = \frac{cx}{2g}\left[-1 + \sqrt{\frac{2g}{\xi \cdot c} + 1}\right] \qquad \text{(a.)}$$

Da $\frac{x}{e_1} = n \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{c}$ und $\frac{y}{a^2} = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{g}$, so ist

$$\frac{c}{g} = \frac{1}{n}\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Wenn OE' die Linie der Eisenspannungen bedeutet, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{E_e}{E_b}\operatorname{tg}\varphi,$$

wobei E_e und E_b die Elastizitätsmodule des Eisens und Betons sind.

Dann ist $\operatorname{tg}\beta = \varkappa \cdot \operatorname{tg}\varphi' = \varkappa \frac{E_e}{E_b} \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

Demnach $$\frac{c}{g} = \frac{1}{n}\frac{\varkappa \cdot E_e \operatorname{tg}\varphi}{E_b \cdot \operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{n}\frac{\varkappa \cdot E_e}{E_b}.$$

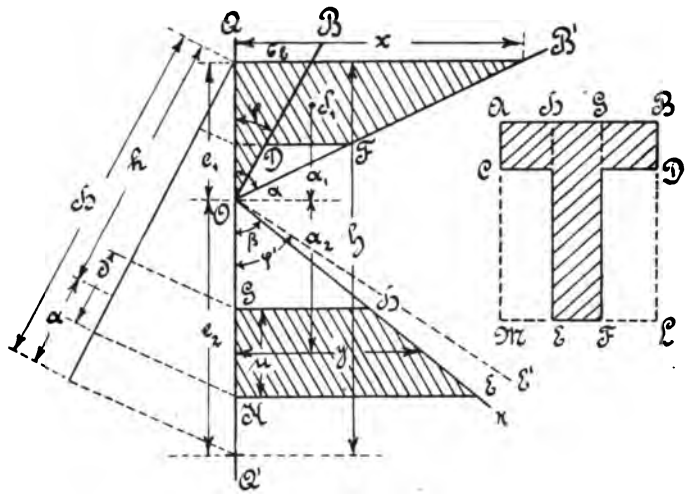


Fig. 30.

Es ist aber $1 \cdot d \cdot \varkappa = \frac{\mu}{100} \cdot h$, wenn μ den Eisenprozentsatz des Stegrechteckes von der Höhe h (oberhalb des Schwerpunktes der Einlage), also $\mu = \frac{100 f_e}{f_b}$ darstellt.

Demnach ist $$\varkappa = \frac{h}{d} \cdot \frac{\mu}{100}.$$

Ferner setzen wir $\frac{E_e}{E_b} = \alpha$ dem Verhältnis der Elastizitätsmodule des

Eisens und Betons. Deshalb wird

$$\frac{c}{g} = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{d}{h} \cdot \frac{\mu}{100}.$$

Substituiert man für $x = n \cdot \sigma_b$, für $y = \varkappa \cdot \sigma_e = \frac{h}{d} \cdot \frac{\mu}{100} \cdot \sigma_e$,

und hierin für $\frac{h}{d} = \frac{1}{\xi} = 10$, so ist

$$\sigma_e = \frac{\alpha}{2} \cdot \left[-1 + \sqrt{\frac{200 \cdot n}{\alpha \mu} + 1} \right] \cdot \sigma_b. \qquad (8.)$$

Das Moment der Spannungsflächen f_1 und f_2 ist

$$M = f(a_1 + a_2).$$

Die Lage des Schwerpunktes der Druckspannungsfläche wird mit $a_1 = \frac{2}{3} e_1$, jener der Zugspannungsfläche mit dem Schwerpunkt der Eiseneinlage übereinstimmend angenommen.

Es ist also

$$M = \frac{cx^2}{2}\left(\frac{2}{3}cx + gy\right) = \frac{cx^2}{2}\left[\frac{2}{3}cx + \frac{cx}{2} \cdot \left(-1 + \sqrt{\frac{2g}{\xi c} + 1}\right)\right]$$

$$= \frac{c^2 x^3}{12}\left[1 + 3\sqrt{\frac{2g}{\xi c} + 1}\right].$$

Die wirksame Querschnittshöhe

$$h = e_1 + a_2 = cx + gy = cx\left(1 + \frac{g}{c} \cdot \frac{y}{x}\right).$$

Nach Einsetzung des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ aus Gl. (a.) wird

$$h = \frac{cx}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{2g}{\xi c} + 1}\right]. \qquad (b.)$$

Die ideelle Biegungsspannung des Querschnitts ist demnach

$$k = \frac{M}{W} = \frac{M}{\frac{1}{6}h^2} = \frac{6M}{h^2} = 2x \cdot \frac{1 + 3\sqrt{\frac{2g}{\xi c} + 1}}{\left(1 + \sqrt{\frac{2g}{\xi c} + 1}\right)^2}. \qquad (c.)$$

Werden in Gl. (c.) für x, c, g und ξ die früheren Werte eingesetzt, so entsteht die Beziehung:

$$k = 2\,\frac{1 + 3\sqrt{\frac{200\,n}{\alpha\mu} + 1}}{\left(1 + \sqrt{\frac{200\,n}{\alpha\mu} + 1}\right)^2} \cdot n\,\sigma_b. \qquad (9.)$$

Die Lage der Nullinie ist durch das Verhältnis $\frac{h}{e_1}$ gegeben. Mit Hilfe der Gl. (b.) ist

$$\frac{h}{e_1} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{2g}{\xi c} + 1}\right) \qquad \text{(d.)}$$

und nach Einsetzung von g, ξ und c

$$\frac{h}{e_1} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{200\,n}{\alpha\,\mu} + 1}\right). \qquad (10.)$$

Es unterliegt keiner Schwierigkeit, die Beziehungen zwischen k, σ_b und σ_e sowie $\frac{h}{e_1}$ für den Fall zu ermitteln, daß auch proportionale Betonzugspannungen mitwirkend gedacht werden.

Wenn die Fläche ODF wegen zu tiefer Lage der Nullinie sehr groß wird und daher nicht mehr ohne Berücksichtigung bleiben darf, was bei starker Armierung, kleiner Betonelastizität E_b und relativ geringer Plattendicke h' der Fall sein wird, liefern die Formeln 8, 9 und 10 mangelhafte Ergebnisse. Unter Vernachlässigung der Druckspannungen im Stege gelten dann die folgenden, leicht abzuleitenden Beziehungen:

$$e_1 = \frac{2\alpha h f_e + B h'^2}{2\,(\alpha f_e + B h')} \qquad (11.), \qquad a_1 = e_1 - \frac{h'}{2} + \frac{h'^2}{6\,(2e_1 - h')}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e(h - e_1 + a_1)} \qquad (12.)$$

$$\sigma_b = \frac{e_1}{\alpha\,(h - e_1)} \cdot \sigma_e. \qquad (13.)$$

48. Beispiele.

1. Hennebique-Träger von der Spannweite $l = 7{,}5$, mit der Gesamtbelastung $q = 1060$ kg/m², der Plattenbreite $B = 2{,}33$, der Plattendicke 0,09, der Höhe des Steges 0,30 und dessen Breite $b = 0{,}35$ m. Armierung 6 Rundeisen à 25 mm. (Beispiel von Barkhausen, Z. f. A. u. I. 1901, S. 150.) Wie groß sind die Spannungen?

Biegungsmoment $\frac{1}{8} \cdot 1060 \cdot 7{,}5 \cdot 750 \cdot 2{,}33 = 1\,740\,510$ cm/kg.

Eisenquerschnitt $f_e = 6 \cdot 491 = 29{,}46$ cm².

Annahme: Wirksame Querschnittshöhe $h = \frac{7}{8} H = \frac{7}{8} \cdot 39 = 34{,}13$ cm.

Betonquerschnitt des Stegrechteckes von der Höhe h ist

$$f_b = 35 \cdot \frac{7}{8} \cdot 39 = 1194 \text{ cm}^2.$$

Der Eisenprozentsatz $\mu = \frac{100\, f_e}{f_b} = 2{,}47\,\%$.

Verhältnis von Platten- und Stegbreite $n = \frac{2{,}33}{0{,}35} = 6{,}66$.

Das elastische Verhalten des Betons sei durch die Betonkurve 3 (T.-Fig. 1) gegeben, also $E_b = 250000$, daher

$$\alpha = \frac{2000000}{250000} = 8.$$

Das Widerstandsmoment des Stegrechteckes von der Höhe $h = 34{,}13$ ist

$$w = \frac{1}{6} \cdot 35 \cdot 34{,}13^2 = 6789 \text{ cm}^3.$$

Die ideelle Biegungsspannung hierfür ist

$$k = \frac{M}{W} = \frac{1740510}{6789} = 256 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\frac{200\, n}{\alpha\, \mu} + 1} = \sqrt{\frac{200 \cdot 6{,}66}{8 \cdot 2{,}47} + 1} = 8{,}28.$$

Nach Formel (9.) ist

$$\sigma_b = \frac{k}{2\, n} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{200\, n}{\mu\, \alpha} + 1}\right)^2}{1 + 3 \cdot \sqrt{\frac{200\, n}{\mu\, \alpha} + 1}} = \frac{256}{2 \cdot 6{,}66} \cdot \frac{(1 + 8{,}28)^2}{1 + 3 \cdot 8{,}28}$$

$$= 64 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach Formel (8.) ist $\sigma_e = \frac{8}{2}(-1 + 8{,}28) \cdot 64 = 1863 \text{ kg/cm}^2$.

Die Lage der Nullinie ergibt sich aus (10.) mit

$$\frac{h}{e_1} = \frac{1}{2}(1 + 8{,}28) = 4{,}64,$$

d. h. die Nullinie liegt noch im Plattenteil des Trägers und zwar

$$e_1 = \frac{h}{4{,}64} = \frac{34{,}13}{4{,}64} = 7{,}4 \text{ cm}$$

von der Oberkante entfernt.

2. Betoneisenbalken rechteckigen Querschnitts, 1 m breit, 0,10 dick, soll ein Moment von 54000 cmkg übertragen, wobei die Betonpressungen 40 kg/cm² nicht übersteigen sollen. Das Elastizitätsverhältnis ist mit $\alpha = 20$ festgesetzt. Welche Armierung ist erforderlich?

Wenn die nutzbare Höhe $h = 9$ cm, so ist

$$W = \frac{1}{6} 100 \cdot 9^2 = 1350 \text{ cm}^3, \quad k = \frac{M}{W} = \frac{54000}{1350} = 40 \text{ kg/cm}^2.$$

Setzt man in Gl. (9.) (Abs. 47) für $n = 1$, für $k = 40$, $\sigma_b = 40$ und $\sqrt{\frac{200}{\alpha\,\mu} + 1} = w$,

so erhält man aus der Gleichung $\frac{2 + 6\,w}{(1 + w)^2} = 1$,

$$w = 4{,}236.$$

Für $\alpha = 20$ eingesetzt, gibt $\mu = 0{,}59\,\%$.

Die entstehende Eisenspannung ist nach Gl. (8.) zu rechnen:

$$\sigma_e = \frac{20}{2}(-1 + 4{,}236) \cdot 40 = 1294 \text{ kg/cm}^2.$$

Soll σ_e etwa 1000 kg/cm² nicht übersteigen, so ergibt sich nach Gl. (8.) $\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{\alpha}{2}(-1 + 10)$; hieraus nach Einsetzung von $\sigma_e = 1000$, $\sigma_b = 40$ und $\alpha = 20$

$$w = 3{,}5 \text{ und somit } \mu = 0{,}89\,\%.$$

49. Aufstellung einer Tabelle zur approximativen Berechnung armierter Balken.

In den Formeln 8., 9. und 10 ist die Größe des Elastizitätsverhältnisses $\frac{E_e}{E_b} = \alpha$ noch offen gelassen. Nach dem vorläufigen Entwurf zu Berechnungsnormen für Eisenbeton, welche von einem Ausschuß des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine sowie des deutschen Beton-Vereines festgesetzt sind, soll $\alpha = 15$ gesetzt werden. Führt man statt $\frac{\mu}{n} = \bar{\mu}$ den Eisen-Prozentgehalt des dem Plattenquerschnitt umschriebenen Rechteckes von der Höhe h, wofür in der Folge wieder μ geschrieben wird, statt $\frac{k}{n} = \bar{k}$ die ideelle Biegungsspannung des vorgenannten Rechteckes ein, welche wieder k genannt wird, dann sind die Beziehungen der hier in Betracht kommenden Größen, wenn $\sqrt{\frac{200\,n}{\alpha\,\mu} + 1} = \sqrt{\frac{40}{3\,\mu} + 1} = w$ gesetzt wird, ausgedrückt durch:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{15}{2} \cdot (w - 1) \qquad (14.)$$

$$\frac{k}{\sigma_b} = 2\,\frac{1 + 3\,w}{(1 + w)^2} \qquad (15.)$$

$$\frac{\sigma_b}{k} = \frac{(1 + w)^2}{2\,(1 + 3\,w)} \qquad (16.)$$

$$\frac{\sigma_e}{k} = \frac{\sigma_e}{\sigma_b} \cdot \frac{\sigma_b}{k} = \frac{15}{4} \cdot \frac{(w-1)(w+1)^2}{(1+3w)^2} \qquad (17.)$$

$$\frac{h}{e_1} = \frac{w+1}{2}. \qquad (18.)$$

Die einzige Variable in den Beziehungen (11.) bis (15.) ist μ; sonach lassen sich diese Verhältnisse in Form einer Tabelle zusammenstellen, welche in vorteilhafter Weise für die Berechnung von Eisenbeton- und anderen armierten Steinbalken (z. B. freitragenden Mauern und Wänden) verwendet werden kann (s. Tabelle, Abschnitt VI.), wie an den folgenden Beispielen gezeigt wird.

Beispiel 1. Welches Moment kann ein armierter Betonbalken rechteckigen Querschnitts von 100×16 und 12 Rundeisen von 20 mm Stärke bei 40 kg/cm² Randspannung des Betons übertragen und wie hoch sind die Eisenspannungen?

Die wirksame Querschnittshöhe sei 14 cm, der Betonquerschnitt ist also $f_b = 14 \cdot 100 = 1400$ cm²; der Eisenquerschnitt ist $f_e = \frac{100}{12} \cdot 3{,}14 = 26{,}2$ cm²,

$$\mu = \frac{100 \cdot 26{,}2}{1400} = 1{,}87\,\%.$$

Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist

$$W = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 14^2 = 3267 \text{ cm}^3.$$

$$M = k \cdot W.$$

Aus Kolumne 1, $\mu = 1{,}87$, ist $\frac{k}{\sigma_b} = 1{,}288$; da $\sigma_b = 40$ gegeben, wird $k = 40 \cdot 1{,}288 = 51{,}52$ kg/cm², demnach

$$M = 51{,}52 \cdot 3267 = \underline{168000 \text{ cm/kg}}.$$

Aus Kolumne 2 ist $\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = 13{,}88$, daher $\sigma_e = 13{,}88 \cdot \sigma_b = 13{,}88 \cdot 40 = 552$ kg/cm².

Beispiel 2. Betoneisenbalken von 28×56 Stegquerschnitt, 250 cm Plattenbreite, 10 cm Plattendicke, Armierung 5 Rundeisen à 28 mm, Biegungsmoment $M = 1430000$ cmkg.

$f_e = 30{,}79$ cm²,

$f_B = 250 \cdot 60 = 15000$ cm² (wirksame Höhe $h = 60$ cm),

$$\mu = \frac{100 \cdot 30{,}79}{15000} = 0{,}205\,\%,$$

$$W = \frac{1}{6} \cdot 250 \cdot 60^2 = 150000 \text{ cm}^3,$$

$$k = \frac{M}{W} = \frac{1430000}{150000} = 9{,}53 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach Kolumne 3 ist

$$\frac{\sigma_b}{k} = 1{,}640, \text{ daher } \sigma_b = 1{,}625 \cdot 9{,}53 = 15{,}6 \text{ kg/cm}^2$$

und nach 4 ist

$$\frac{\sigma_e}{k} = 87{,}71, \text{ also } \sigma_e = 87{,}7 \cdot 9{,}53 = 836 \text{ kg/cm}^2.$$

Beispiel 3. Es ist ein Plattenbalken von $l = 8$ m Spannweite und 5 m Breite zu dimensionieren, wenn derselbe eine Nutzlast von 600 kg/m² tragen soll. Der Beton ist nicht stärker als mit 35, das Eisen mit 1000 kg/cm² zu beanspruchen. Beide Stoffe sind tunlichst auszunutzen. Das Eigengewicht wird auf 400 kg/m² geschätzt, die Gesamtlast beträgt also $g = 1000$ kg/m². Das Biegungsmoment

$$M = \frac{1}{8} Q l = \frac{1}{8} (5 \cdot 8 \cdot 1000) \cdot 800 = 4000000 \text{ cmkg}.$$

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \frac{1000}{35} = 28{,}57.$$

Nach Kolumne 2 entspricht diesem Verhältnis ein $\mu = 0{,}60\,\%$.

Hiermit ist $\frac{k}{\sigma_b} = 0{,}9130$, also $k = 35 \cdot 0{,}9130 = 31{,}96$

und
$$W = \frac{M}{W} = \frac{4000000}{31{,}96} = 125000 \text{ cm}^3$$

$$\frac{1}{6} 500\, h^2 = 125000$$

$$h^2 = 1500, \quad \underline{h = 38{,}7 \text{ cm}},$$

$$\mu = \frac{100 f_e}{f_B}; \text{ daraus } f_e = \frac{\mu}{100} f_B = \frac{0{,}60}{100} \cdot 500 \cdot 38{,}7 = 116{,}1 \text{ cm}^2.$$

Werden Rundeisen mit 36 mm Dicke angenommen, so ist ihre Zahl

$$\frac{116{,}1}{10{,}17} = 12.$$

Wir ordnen 2 Stege an, in denen je 6 Eisen paarweise übereinander eingebettet werden; die Stegbreite ergibt sich bei 5 cm gegenseitigem Abstand und angemessener Entfernung der Armierung vom Rande mit $b = 30$ cm.

Die Nullinie liegt, da nach Kolumne 6 $\frac{h}{e_1} = 2{,}91$, $e_1 = 13{,}3$ cm vom oberen Rande.

Die günstigste Lage der Stege berechnet sich aus der Beziehung, daß die größten Momente im überkragenden Plattenteil und in der

Zwischenplatte gleich seien. Das Moment des Kragplattenteils ist $M_1 = \frac{Q_1 l_1}{2} = \frac{q l_1^2}{8}$, worin l_1 die Länge des Kragteils und q die Belastung pro m^2 ist.

Das Moment der Zwischenplatte ist $M_2 = \frac{1}{12} q l_2^2$, demnach

$$\frac{q l_1^2}{2} = \frac{q l_2^2}{2} \text{ und hieraus } l_2 = l_1 \sqrt{6} = 2{,}45\, l_1.$$

Es ist aber $2 l_1 + l_2 + 2 \cdot 30 = 500$ der Plattenbreite, hieraus

$$l_1 = 100 \text{ cm}, \quad l_2 = 240 \text{ cm}.$$

Das maximale Moment ist $M_1 = M_2 = \frac{1000 \cdot 100}{2} = 50000$ cmkg auf 100 cm Breite.

Annahme Plattendicke $h' = 10$ cm, daher das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 10^2 = 1667 \text{ cm}^3 \text{ und}$$

$$k = \frac{M}{W} = \frac{50000}{1667} = 30.$$

Nach Kolumne 3 für $\frac{\sigma_b}{k} = \frac{35}{30} = 1{,}167$ ist $\mu = 0{,}50\,\%$, und nach Kolumne 4 für $\frac{\sigma_e}{k} = \frac{1000}{30} = 33{,}33$ ist $\mu = 0{,}57\,\%$. Es ist also eine Querarmierung $\mu = 0{,}57\,\%$ erforderlich.

Die Gesamthöhe des Plattenbalkens ist $H = h + a$. Wählen wir $a = 6$ bis 7 cm, so wird $H = 45$ cm. Daraus ergibt sich ein Eigengewicht von etwa 350 kg/m^2 (gegen 400 der Annahme).

Doppelte Armierung. Ist ein Balken rechteckigen Querschnitts auch in der Druckzone mit $\mu_1\,\%$ Eisen armiert, so kann dessen Wirkung bei den üblichen Zugarmierungen annäherungsweise dadurch berücksichtigt werden, daß man sich die Balkenbreite B auf

$$B' = \left(1 + \frac{\alpha \cdot \mu_1}{30}\right) \cdot B \qquad (19.)$$

vergrößert denkt, für welche nun genau wie früher die Spannungen zu bestimmen sind.

Für $\alpha = 15$ wird $B' = \left(1 + \frac{\mu_1}{2}\right) B.$ (20.)

Beispiel 4. Betonplatte, Dicke 12 cm; untere Armierung 2 cm vom Rande, 15 mm starke Rundeisen, 8 cm entfernt; obere Armierung 12 mm starke Rundeisen, 10 cm entfernt; Tragfähigkeit zu bestimmen

bei der höchsten Betonpressung $\sigma_b = 35$ und dem größten Eisenzug $\sigma_e = 1000$ kg/cm².

$$h = 12 - 2 = 10 \text{ cm}.$$

Auf 100 cm Breite beträgt:

$$f_e = \frac{100}{8} \cdot 1{,}767 = 22{,}1 \text{ cm}^2,$$

$$f_{e_1} = \frac{100}{10} \cdot 1{,}131 = 11{,}31 \text{ cm}^2,$$

$$f_b = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ cm}^2,$$

$$\mu_1 = \frac{100 f_{e_1}}{f_b} = 1{,}13\,\%. \text{ Nach Gl. (20.) ist}$$

$$B' = \left(1 + \frac{1{,}13}{2}\right) \cdot 100 = 156{,}5 \text{ cm},$$

sonach ist $f_b' = 10 \cdot 156{,}5 = 1565$ cm² und der Eisenprozentsatz dieses Querschnittes ist

$$\mu' = \frac{100 \cdot 22{,}1}{1565} = 1{,}41\,\%,$$

das Widerstandsmoment berechnet sich mit

$$W = \frac{1}{6} B' h^2 = \frac{1}{6} 156{,}5 \cdot 10^2 = 2608 \text{ cm}^3.$$

Nach Kolumne 1 ist für $\mu = 1{,}41$

$$\frac{k}{\sigma_b} = 1{,}194, \text{ also } k = 1{,}194 \cdot 35 = 41{,}79,$$

demnach $\underline{M} = k \cdot W = 41{,}79 \cdot 2608 = \underline{108\,900 \text{ cmkg}}.$

Ist das Elastizitätsverhältnis α ein anderes als das der Ausrechnung der Tabelle zu Grunde gelegte Verhältnis 15, dann kann diese in der Weise benutzt werden, daß man die Querschnittsbreite B reduziert auf $B' = \frac{15}{\alpha} \cdot B$, wofür die Spannungen k', σ_b' und σ_e' wie früher bestimmt werden. Die wirklichen Spannungen sind dann

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{15}{\alpha} \cdot k', \\ \sigma_b &= \frac{15}{\alpha} \cdot \sigma_b' \text{ und} \\ \sigma_e &= \sigma_e'. \end{aligned}\right\} \qquad (21.)$$

Beispiel 5. Im Beispiel 2 ist $\alpha = 10$ zu setzen.

$$f_e = 30{,}79,$$

$$f_B = \frac{15}{\alpha} \cdot f_B = \frac{15}{10} \cdot 15\,000 = 22\,500 \text{ cm}^2.$$

$$\mu' = \frac{100 \cdot 30{,}79}{22\,500} = 0{,}136\,\%,$$

$$W' = \frac{15}{\alpha}\, 150\,000 = 225\,000\ \text{cm}^3,$$

$$k' = \frac{M}{W'} = \frac{1\,430\,000}{225\,000} = 6{,}35.$$

Nach Kolumne 3 ist $\frac{\sigma_b'}{k'} = 1{,}94$, $\sigma_b' = 1{,}94\, k' = 12{,}32$, daher

$$\sigma_b = \frac{15}{\alpha} \cdot 12{,}32 = 18{,}5\ \text{kg/cm}^2.$$

Nach Kolumne 4 ist $\frac{\sigma_e'}{k'} = 131{,}0$,

also $\sigma_e' = 131 \cdot 6{,}35 = 832\ \text{kg/cm}^2$,

demnach auch $\sigma_e = 832\ \text{kg/cm}^2$.

Beispiel 6. Welches sind die rechnungsmäßigen Beton- und Eisenspannungen in einem Balken von 1 % Eisenarmierung mit der ideellen Biegungsspannung $k = 1$, wenn die Elastizitätsverhältnisse $\alpha = 10$, 15, 20 und 25 angenommen werden.

a) $\alpha = 10$, $\mu' = \frac{10}{15} \cdot \mu = 0{,}67$, $k' = \frac{10}{15} k$, $\frac{\sigma_b'}{k'} = 1{,}055$,

$$\frac{\sigma_b}{k} = \frac{\sigma_b'}{k'} = 1{,}055, \quad \underline{\sigma_b = 1{,}055.}$$

$$\frac{\sigma_e'}{k'} = 28{,}25, \quad \frac{\sigma_e}{k} = \frac{\sigma_e}{\frac{10}{15} k}, \quad \underline{\sigma_e = 18{,}83.}$$

b) $\alpha = 15$, $\mu = 1$, $k = 1$, $\underline{\sigma_b = 0{,}9267}$, $\underline{\sigma_e = 19{,}37.}$

c) $\alpha = 20$, $\mu' = \frac{20}{15} \cdot \mu = 1{,}33$, $k' = \frac{20}{15} k$, $\frac{\sigma_b'}{k'} = 0{,}8514$, $\underline{\sigma_b = 0{,}8514}$

$$\frac{\sigma_e'}{k'} = 14{,}82, \quad \frac{\sigma_e}{k'} = \frac{\sigma_e}{\frac{20}{15} k} = 14{,}82, \quad \underline{\sigma_e = 19{,}76.}$$

d) $\alpha = 25$, $\mu' = \frac{25}{15} \cdot \mu = 1{,}67$, $k' = \frac{25}{15} k$, $\frac{\sigma_b'}{k'} = 0{,}7996$, $\underline{\sigma_b = 0{,}7996.}$

$$\frac{\sigma_e'}{k'} = 11{,}97, \quad \frac{\sigma_e}{\frac{25}{15} k} = 11{,}97, \quad \underline{\sigma_e = 19{,}95.}$$

Die Betonpressungen sind hiernach 1,055, 0,9267, 0,8514 und 0,7996. Die Eisenspannungen betragen 18,83, 19,37, 19,76 und 19,95.

Mit wachsendem Elastizitätsverhältnis α tritt daher eine mäßige Erhöhung der Eisenspannungen und eine relativ stärkere Abnahme der Betonpressungen ein.

Kombiniert man die Gleichungen (8.) und (10.), so erhält man

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = \alpha\,(v-1). \tag{22.}$$

Hierin bedeutet $v = \frac{h}{e_1}$; Gleichung (22.) ist für Balken jedweder Form gültig. Es lassen sich dann für Plattenbalken, deren Plattenstärke durch das Verhältnis $s = \frac{h'}{h} < \frac{e_1}{h}$ bestimmt ist, die Beziehungen aufstellen:

$$\frac{k}{\sigma_b} = s\cdot[6 - 3s\,(v+1) + 2s^2\cdot v] \tag{23.}$$

$$\frac{f_e}{f_B} = \frac{s}{2}(2 - sv)\cdot\frac{\sigma_b}{\sigma_e}. \tag{24.}$$

k ist die ideelle Biegungsspannung des dem Plattenbalkenquerschnitt umschriebenen Rechteckes, f_B der Querschnitt dieses Rechteckes, also

$$k = \frac{M}{\frac{1}{6}\cdot Bh^2} \text{ und } f_B = B\cdot h.$$

Für einfache Platten rechteckigen Querschnitts ist $h' = e_1$ und daher

$s = \frac{1}{v}$; die Gleichungen (23.) und (24.) lauten hierfür

$$\frac{k}{\sigma_b} = \frac{3v-1}{v^2} \tag{25.}$$

$$\frac{f_e}{f_B} = \frac{1}{2v}\cdot\frac{\sigma_b}{\sigma_e}. \tag{26.}$$

Die durch die Gleichungen (22.) bis (26.) dargestellten sehr einfachen Formeln werden ganz besonders vorteilhaft, wenn für den Quotienten $\frac{\sigma_e}{\alpha\cdot\sigma_b}$ ein fester Wert eingesetzt wird. Wir machen mit Rücksicht darauf, daß in den vorläufigen Normen $\alpha = 15$ und die zulässigen Spannungen mit $\sigma_e = 1000$ und $\sigma_b = 40$ festgesetzt sind,

$$\frac{\sigma_e}{\alpha\cdot\sigma_b} = \frac{5}{3}; \text{ hieraus ist } \sigma_e = \frac{5}{3}\alpha\cdot\sigma_b \tag{27.}$$

Aus Gleichung (22.) wird daher $v = \frac{8}{3}$.

Für Plattenbalken gelten demnach die Formeln:

$$\frac{k}{\sigma_b} = s \cdot \left(6 - 11s + \frac{16}{3}s^2\right) \qquad (28.)$$

$$\frac{f_e}{f_B} = 0{,}6 \cdot \frac{s}{\alpha}\left(1 - \frac{4}{3}s\right). \qquad (29.)$$

Für Balken rechteckigen Querschnitts heißen die Formeln:

$$\frac{k}{\sigma_b} = \frac{63}{64} \sim 1. \qquad (30.)$$

$$\frac{f_e}{f_B} = \frac{9}{80 \cdot \alpha} \qquad (31.)$$

Bei doppelter Armierung ist vorerst Gleichung (19.) zur Anwendung zu bringen.

Die Gleichungen (22.) bis (26.) und insbesondere (27.) bis (31.) können als die einfachsten Formeln zur Dimensionierung von Eisenbetonbalken bei zweckmäßigster Ausnutzung der Materialfestigkeit gelten.

f) Die Ermittlung der Biegungslinie.

50. Ableitung der Gleichung der Biegungslinie und Konstruktion derselben.

Infolge der Verdrehung je zweier Nachbarquerschnitte und ihrer Abstandsänderung tritt eine allgemeine Deformation eines Trägers ein, die Biegung genannt wird. Werden die Verschiebungen einer Faserschichte von einer Geraden in der Lastrichtung nach abwärts aufgetragen, so erhält man die Biegungslinie des Balkens.

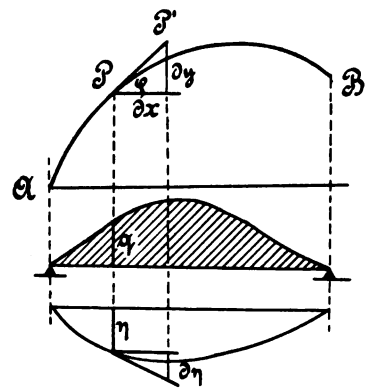


Fig. 31.

Aus Fig. 31 ist $dy = ds \cdot \sin\varphi$. (a.)

Die Senkung des Punktes P beträgt $-\Delta y = \eta$, die des Nachbarpunktes P' gegen P ist $-d\Delta y = d\eta$.

Durch Differenziation der Gl. (a.) erhält man:

$$\Delta dy = \Delta ds \cdot \sin\varphi + ds \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\varphi$$

oder $\Delta dy = \frac{\Delta ds}{ds} \cdot dy + dx \cdot \Delta\varphi$ und hieraus $-\frac{d\eta}{dx} = \frac{\Delta ds}{ds} \cdot \operatorname{tg}\varphi + \Delta\varphi$.

Diese Gleichung differenziert, gibt

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx},$$

die Differenzialgleichung der Biegungslinie.

Setzen wir $\frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx} = q$, so ist $-\frac{d^2\eta}{dx^2} = q$,

d. h. die Biegungslinie ist eine Seilkurve mit der Polentfernung 1 für den belasteten Träger, wenn derselbe mit einer Belastung versehen wird, deren Größe pro Längeneinheit in jedem Punkte q ist.

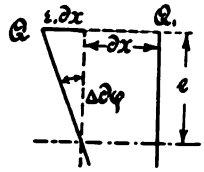


Fig. 32.

Bei dem auf Biegung beanspruchten Betonbalken ist angenähert aus Fig. 32

$$\operatorname{tg}\Delta d\varphi = \frac{\varepsilon dx}{e},$$

worin ε die Längenänderung der Längeneinheit irgend einer Faser und e deren Abstand von der Nullinie bedeutet.

Statt $\operatorname{tg}\Delta d\varphi$ kann man wegen der Kleinheit des Winkels $\Delta d\varphi$ setzen, demnach

$$\Delta d\varphi = \frac{\varepsilon dx}{e} \text{ oder}$$

$$\Delta d\varphi = \frac{\varepsilon}{e}.$$

$\frac{\Delta ds}{ds}$ ist eine Funktion der auf den Querschnitt wirkenden äußeren Normalkraft; da diese bei reiner Biegung Null ist, so verschwindet auch der Ausdruck

$$\frac{d\left(\frac{\Delta ds}{de}\cdot\operatorname{tg}\varphi\right)}{ds}.$$

Die Biegungsgleichung lautet daher

$$\underline{-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{e}}.$$

Anmerkung. Dieselbe Beziehung erhält man unter der Voraussetzung der geradlinigen Stabachse aus der für konstant elastische Stäbe gültigen Gleichung der Biegungslinie:

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{\overline{E}J},$$

wobei $\overline{E}$ der Elastizitätsmodul ist, wofür wir $\frac{1}{\alpha}$ setzen.

Nach früherem ist

$$M = A \cdot E$$

$$\overline{E} \cdot J = \frac{J}{\alpha} = \frac{e_1^3 + e_2^3}{3} \cdot \frac{3 e_1 \cdot A \cdot E}{\varepsilon_1 (e_1^3 + e_2^3)} = \frac{e_1 \cdot A \cdot E}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{M}{\overline{E} J} = \frac{A \cdot E \cdot \varepsilon_1}{e_1 \cdot A \cdot E} = \frac{\varepsilon_1}{e_1}, \text{ daher}$$

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\varepsilon_1}{e_1} = \frac{\varepsilon}{e}.$$

Das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{e}$ ist leicht zu finden, wenn man die Spannungsverteilung über dem Querschnitt, also die Spannungsflächen kennt. Es erscheint zweckmäßig, ε und e für die äußerste Faser einzusetzen. Zu beachten ist, daß e durch den verhältnismäßigen Abstand $\mathfrak{e}$ nicht ersetzt werden darf.

Für die zeichnerische Ermittlung der Biegungslinie genügt die Bestimmung mehrerer (etwa dreier) Werte von $\frac{\varepsilon}{e}$ für verschiedene Momente, da sich $\frac{\varepsilon}{e}$ im allgemeinen kontinuierlich ändert, und somit durch eine krumme Linie dargestellt werden kann, aus welcher beliebige Zwischenwerte entnommen werden. (Für das Moment Null ist auch $\frac{\varepsilon}{e} = 0$.) Hat man die Belastungslinie $\frac{\varepsilon}{e}$ für eine bekannte Momentenfläche aufgetragen, so zerlegt man die Belastungsfläche in Abschnitte, in deren Schwerpunkten den Flächenabschnitten proportionale Kräfte wirkend gedacht werden. Wählt man die Polentfernung E (ausgedrückt im Maßstab dieser Kräfte), dann ist die Durchbiegung an irgend einer Stelle

$$\eta = \eta_1 \cdot E,$$

worin η_1 die Ordinate der Seillinie im Maßstab des Trägers ist. Die Seillinie ist eine dem Seileck eingeschriebene Kurve.

51. Bestimmung der maximalen Durchbiegungen δ.

a) Für den Kragbalken mit Einzellast am Ende ist

$$\delta = \frac{P}{\overline{E} \cdot J} \cdot \frac{l^3}{3}.$$

„ „ mit gleichmäßig verteilter Last ist

$$\delta = \frac{Q}{\overline{E} \cdot J} \cdot \frac{l^3}{8}.$$

b) Für den frei aufliegenden Balken auf zwei Stützen mit Einzellast in der Mitte ist

$$\delta = \frac{P}{\overline{E} \cdot J} \cdot \frac{l^3}{48},$$

für denselben Balken mit gleichmäßig verteilter Last ist

$$\delta = \frac{Q}{\overline{E} \cdot J} \cdot \frac{l^3}{75} \text{ (abgerundet).}$$

Für veränderlich elastische Stoffe ist der Wert

$$\overline{E} \cdot J = \frac{J}{\alpha} = \frac{J}{\frac{\varepsilon_1}{k_1'}} = J \frac{k_1'}{\varepsilon_1}$$

über den Trägern veränderlich. Er nimmt bei armiertem Beton mit wachsendem Moment ab. Da die unter a) und b) genannten Formeln nur für konstantes $\overline{E} \cdot J$ gelten, muß ein schätzungsweiser Mittelwert eingeführt werden, was bei einiger Übung gelingt. Zweckmäßig trägt man die Kurve der $\frac{J}{\alpha}$ über dem Träger auf, woraus sich ein Mittelwert annehmen läßt (s. T.-Fig. 17).

Die Durchbiegungsformeln für äußerlich statisch unbestimmte Balken (z. B. für den beiderseits eingespannten mit gleichmäßig verteilter Last

$$\delta = \frac{Q}{\overline{E} \cdot J} \frac{l^3}{384})$$

sind auf Balken aus veränderlich elastischen Stoffen nicht anwendbar oder sehr ungenau.

g) Untersuchung einer Hennebique-Decke.

In der „Z. d. ö. Ing.- und Arch.-V.", 1902, H. 50, und in „Beton u. Eisen" 1903, H. 1, teilt Dr. R. v. Thullie einen interessanten Versuch mit, der mit einer Hennebique-Konstruktion im Frühjahr 1902 in Lemberg behufs Verwendung dieser Bauweise bei dem Neubau des dortigen Bahnhofsaufnahmsgebäudes durchgeführt wurde. Die Probedecke bestand aus zwei 9,5 m gespannten Hauptträgern, zwei Querträgern mit dazwischen liegender und überragender Deckenplatte.

Da systematische Versuche an solch bedeutenden Probekonstruktionen nicht häufig durchgeführt werden, erscheint die Anwendung der Theorie auf die Versuchsergebnisse, bezw. die Ermittlung, wie weit diese mit den graphischen und rechnerischen Resultaten in Einklang stehen, von hervorragendem Interesse. Herr von Thullie hat dies nach seinen Methoden bezüglich des Bruches der Decke getan. Im folgenden wird nun die Untersuchung mittels des graphischen Verfahrens bezüglich der Spannungen, der Durchbiegungen und des Bruches durchgeführt.

α) **Voraussetzungen.**

52. Material.

Da die Mischung des Betons 1 : 3 : 5 (Pontlandzement, Sand und Schlägelschotter) war, dürfte dessen elastisches Verhalten annähernd durch die in T.-Fig. 1 dargestellte Betonkurve 3 dargestellt werden können, wobei die Betonzugkurve als mutmaßlich zwischen Kurve 6 und 7, nach den Grut-Considèreschen Versuchen, fast geradlinig bis etwa 26 $\frac{kg}{cm^2}$ Spannung bei 0,001 Dehnung verlaufend, angenommen ist. Die Druckfestigkeit des Betons betrug nach den Proben in der mechanischen Versuchsanstalt in Lemberg 51 bis 190 $\frac{kg}{cm^2}$, die Zugfestigkeit soll nach den Ablesungen an den Manet-Apparaten bis 26 $\frac{kg}{cm^2}$ bei 0,001 3 Dehnung gereicht haben. Hierzu ist zu bemerken, daß diese Dehnung sehr groß erscheint, falls der Beton tatsächlich noch intakt war und die Proportionalitätsgrenze des verwendeten Eisens bei 0,001 Dehnung lag. Es wird deshalb im folgenden die Zugfestigkeit des Betons nur bis 0,001 Dehnung in Rechnung gezogen.

Die Qualität des Eisens ist in dem Berichte nicht näher bezeichnet. Es wird daher angenommen, daß dessen Proportionalitätsgrenze bei 2000 $\frac{kg}{cm^2}$ liegt, die Dehnungsziffer bis dahin $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$, sonach die Dehnung bei 2000 $\frac{kg}{cm^2}$ 0,001 beträgt, und daß die Spannungslinie von der Proportionalitätsgrenze an mit den Versuchsergebnissen Bachs mit Flußeisenrundstäben übereinstimmt, wobei das eigentümliche Verhalten des Eisens auffällt, sich nach Erreichen der Proportionalitätsgrenze beträchtlich ohne Spannungszunahme auszudehnen, ehe es für die Aufnahme höherer Spannungen fähig wird. Die Berücksichtigung dieses Umstandes, sowie überhaupt der Verlauf der Dehnungslinie ist für die Ermittlung der höheren und insbesondere der Bruchspannungen ganz wesentlich. (v. Thullie nimmt in seiner Berechnung eine ziemlich willkürliche Gerade an.)

53. Querschnitt.

Für die Untersuchung der Probe-Decke wird der in T.-Fig. 13 dargestellte Querschnitt als ein einheitlich wirkender betrachtet, in welchem jedoch die in der Platte liegenden Eisenstäbe nicht berücksichtigt werden, weil diese, als hauptsächlich gegen die Biegung der Platte zwischen Haupt- und Querträgern bestimmt, angenommen werden dürfen. — Hier-

nach ist der reduzierte (theoretische) Querschnitt mit der Stegbreite 1, der Plattenbreite $n = \frac{410}{60} = 6{,}83$ und der Eiseneinlage $\varkappa = 0{,}183$, deren Schwerpunktsabstand $a = 8$ und deren Höhe $d = 9{,}4$ cm beträgt, gezeichnet (T.-Fig. 14).

Nach Fig. 33 ist der Eisenquerschnitt eines Hauptbalkens

$$f_e = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 3{,}3^2}{4} = 51{,}32 \text{ cm}^2,$$

der Betonquerschnitt von der Höhe der Eiseneinlage $d = 9{,}4$ und der Breite des Balkens $b = 30$ ist

$$f_b = 30 \cdot 9{,}4 = 282{,}0 \text{ cm}^2.$$

Daher $$\varkappa = \frac{f_e}{f_b} = \frac{51{,}32}{282{,}0} = 0{,}182.$$

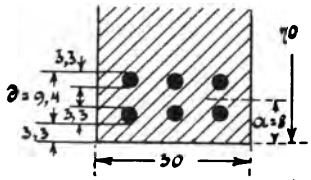


Fig. 33.

Der Gesamtquerschnitt des Eisens ist

$$f_e' = 2 \cdot 51{,}32 = 102{,}64 \text{ cm}^2,$$

der Querschnitt des Plattenbalkens ist

$$f_B = 410 \cdot 10 + 2 \cdot 30 \cdot 60 = 7700 \text{ cm}^2,$$

demnach der Prozentsatz des Eisens

$$\mu = 100 \cdot \frac{102{,}64}{7700} = 1{,}33\ \%.$$

Der Querschnitt wird für den ganzen Träger konstant angenommen, das Verlaufen von je 3 Stäben nach der oberen Kante also nicht berücksichtigt. Es unterläge keiner besonderen Schwierigkeit, die Querschnitts-Variation zu beachten, doch würde die Untersuchung weit umständlicher.

β) Spannungen und Senkungen bis zur Proportionalitätsgrenze des Eisens und bis zum Reißen des Betons. (T.-Fig. 12—17.)

54. Erläuterung der graphischen Untersuchung.

Nach Auftragen (T.-Fig. 15) der 1 und $n = 6{,}83$fachen Betonkurve (s. Abs. 26), sowie der Eisenspannungslinie für $\varkappa = 0{,}182$ sind die Spannungsflächen für drei verschiedene Spannungen ermittelt und die dazu gehörigen Momente graphisch gefunden worden. Die Resultate sind nachfolgend zusammengestellt:

Tabelle IV.

Spannungsfläche	0	3	2	1
σ_z	0 (67)	18	22	26
σ_a	0 (46)	27	50	74
σ_e	0 (400)	490	1130	1880
$\frac{e_1}{e_2}$	0,44	0,37	0,33	0,32
$\mathfrak{H}$	6,5	7,34	16,1	26,4
A	0 (2,3)	2,1	18,2	73,7
E	400	400	400	400
$f_1 = f_2$	4,95	3,95	15,3	37,3
a_1	1,40	1,40	2,80	4,5
a_2	3,25	3,80	9,05	15,45
$m^2 \cdot A \cdot E$	0 (111200)	76800	137600	207600
M in mt	0 (66,7)	46,08	82,6	124,6
k	0	28,5	51,0	77,0
$\frac{J}{\alpha}$	$234 \cdot 10^8$	$146 \cdot 10^8$	$120 \cdot 10^8$	$110 \cdot 10^8$
$\frac{\varepsilon}{e}$	$0\ (45 \cdot 10^{-7})$	$53 \cdot 10^{-7}$	$114 \cdot 10^{-7}$	$188 \cdot 10^{-7}$
F_d	—	1430	2540	3840
F_e	—	740	1760	2890

Die Kolumne 0 gibt die Werte für die wirkliche Spannung 0 zur Ermittlung der Elastizitätsziffern für den Beginn der Beanspruchungen. Sie werden nach dem im Abs. 34 enthaltenen Verfahren gefunden. Die in der Tabelle eingeklammerten Werte sind in Wirklichkeit nicht vorhanden. Nach früheren ist $m = \frac{H}{\mathfrak{H}}$, z. B. für die Spannungsfläche 1 ist $m = \frac{70}{26,4} = 2,65$.

Das vorhandene Moment im ganzen Querschnitt ist

$$M = 60 \cdot m^2 \cdot AE = 60 \cdot 2,65^2 \cdot 73,7 \cdot 400 = 12460000 \text{ cmkg}$$
$$= 124,6\ mt \text{ (Trägerbreite 60 cm).}$$

F_d bedeutet die Spannungsfläche des Flansches, F_e jene des Eisens (behufs Bestimmung der Schubspannungen) pro 1 cm Balkenbreite.

Die Größen ε sind unmittelbar aus T.-Fig. 15 zu entnehmen; so beträgt der für die Spannungsfläche 1 eingesetzte Wert $\varepsilon_1 = 0{,}000\,32$ bei einer Druckspannung $\sigma_d = 74$.

e_1 wird graphisch durch die Proportion gefunden:

$$e_1 : \mathfrak{e}_1 = H : \mathfrak{H} \text{ (aus T.-Fig. 15 ersichtlich).}$$

k ist die ideelle Biegungsspannung $\cdot\, k = \frac{M}{w}$, worin w das Widerstandsmoment bezüglich der oberen Flanschkante ist.

Die aus der T.-Fig. 15 erhaltenen Größen σ_z, σ_d, σ_e, k, k_1', α, $\frac{J}{\alpha}$, $\frac{\varepsilon}{e}$, F_d und F_e sind in T.-Fig. 16 als Ordinaten zu den Abszissen $M = m^2 \cdot A \cdot E \cdot$ aufgetragen. Sie bilden kontinuierliche Linien, die mit Ausnahme von α und $\frac{J}{\alpha}$ durch den Ursprung gehen.

Aus den derart konstruierten Kurven (die also aus je 4 Punkten gefunden sind) können beliebige Zwischenwerte entnommen werden. Die meisten dieser Linien schließen sich ziemlich stark an Geraden an; der Genauigkeitsgrad kann daher bei diesem Verfahren ein genügender sein.

Schließlich sind auf Grund der angenäherten Differenzialgleichung der Biegungslinie

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{e}$$

die Biegungslinien in T.-Fig. 17 für 4 verschiedene Belastungen aufgesucht und zwar

II. für 400 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ aufgebrachte Last, mit dem Eigengewicht also 880 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$,
III. „ 800 „ „ „ „ „ „ „ 1280 „
IV. „ 1200 „ „ „ „ „ „ „ 1680 „
V. „ 2000 „ „ „ „ „ „ „ 2480 „

Aus T.-Fig. 16 können die bei obigen Belastungen entstehenden Spannungen abgegriffen werden. So betragen für die aufgebrachte Last von 2000 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ (Fall V)

$$\sigma_z = 26,\ \sigma_d = 70,\ \sigma_e = 1760 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

für die Nutzlast von 400 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ (Fall II) sind

$$\sigma_z = 17,\ \sigma_d = 29,\ \sigma_e = 405\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Die Konstruktion der Belastungslinie $\frac{\varepsilon}{e}$ ist für den Belastungsfall IV in T.-Fig. 16 gezeigt. Darnach teilt man die verhältnismäßige

halbe Spannweite $FG = \frac{l'}{2}$ in eine Anzahl Teile, für welche man je den Wert $\frac{\varepsilon}{e}$ abgreifen kann. $\frac{\varepsilon}{e}$ wird sodann an den der Teilung von FG entsprechenden Teilpunkten der halben Spannweite $AM = \frac{l}{2} = \frac{950}{2}$ aufgetragen, wodurch man die Linie der $\frac{\varepsilon}{e}$ über dem Balken erhält. Nach dem früher angegebenen Verfahren wird die Biegungslinie konstruiert. Die halbe Belastungsfläche ist nach den gestrichelten Geraden in 5 Abschnitte geteilt; die Flächengrößen bezw. die hierfür in den Schwerpunkten zu denkenden Kräfte sind (für den Belastungsfall IV vom Auflager gegen die Mitte):

$$\begin{aligned} q_1 &= 10 \cdot 10^{-5}\,\text{kg} \\ q_2 &= 37 \cdot 10^{-5}\ \text{„} \\ q_3 &= 71 \cdot 10^{-5}\ \text{„} \\ q_4 &= 95 \cdot 10^{-5}\ \text{„} \\ q_5 &= 106 \cdot 10^{-5}\ \text{„} \end{aligned}$$

Trägt man diese Kräfte in einem Maßstab $5 \cdot 10^{-5} = 1$ Teilstrichentfernung auf einer Senkrechten auf und wählt die Polentfernung $E = 1000 \cdot 10^{-5}$, so ist die Durchbiegung in irgend einem Punkte

$$\delta = \delta_1 \cdot E,$$

für die Mitte ist

$$\delta = 100 \cdot 1000 \cdot 10^{-5} = 1{,}0 \text{ cm}.$$

Auf dieselbe Weise sind die Biegungslinien für die Belastungsfälle II, III und V gezeichnet, zu welchen der Maßstab eingezeichnet ist.

In T.-Fig. 17 ist für den Belastungsfall V auch die Linie der $\frac{J}{\alpha}$ eingetragen und hierzu eine mittlere Linie DE gezeichnet. Der Abstand EB gibt das mittlere $\frac{J}{\alpha}$ des Trägers bei der Belastung V. Es ist $\frac{J}{\alpha} = 128 \cdot 10^8$; hiernach ist

$$\delta = \frac{Q}{\frac{J}{\alpha} \cdot 60} \cdot \frac{l^3}{75} = \frac{2480 \cdot 40}{128 \cdot 10^8 \cdot 60} \cdot \frac{950^3}{75} = 1{,}5 \text{ cm}.$$

Aus der Biegungslinie ergibt sich $\delta = 1{,}6$ cm. Die Übereinstimmung ist als genügend zu erachten.

55. Ableitung der mittleren Elastizitätsmaße des Balkens.

Aus der Senkung der Mitte des gleichmäßig belasteten Balkens kann das mittlere oder durchschnittliche Elastizitätsmaß des Verbundkörpers abgeleitet werden nach der Beziehung:

$$\delta = \frac{1}{75} \cdot \frac{Q}{EJ} \cdot l^3.$$

Hieraus ist

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{Q l^3}{75 \cdot J \cdot \delta};$$ hierin ist $l = 950$ cm, $J = 3462000$ cm^4,

für Belastung II beträgt $Q_{II} = 40 \cdot (400 + 480) = 35200$ kg u. $\delta_{II} = 0{,}38$ cm,
demnach $E_{II} = 306000$, $\alpha_{II} = 0{,}0000033$,

„ „ III ist $Q_{III} = 51200$, $\delta_{III} = 0{,}66$ cm,
also $E_{III} = 260000$, $\alpha_{III} = 0{,}0000039$,

„ „ IV $Q_{IV} = 67200$, $\delta_{IV} = 1{,}0$ cm,
daher $E_{IV} = 222000$, $\alpha_{IV} = 0{,}0000045$,

„ „ V $Q_V = 99200$, $\delta_V = 1{,}6$ cm,
demnach $E_V = 204000$, $\alpha_V = 0{,}0000049$.

In den stärkst beanspruchten Querschnitten ist die ideelle Elastizität

bei Belastung II $\alpha_{II}' = 0{,}0000030$,
„ „ III $\alpha_{III}' = 0{,}0000036$,
„ „ IV $\alpha_{IV}' = 0{,}0000041$,
„ „ V $\alpha_V' = 0{,}0000046$.

Die Druckelastizität des Betons beträgt unter denselben Verhältnissen

$\alpha_{II}'' = 0{,}0000032$,
$\alpha_{III}'' = 0{,}0000036$,
$\alpha_{IV}'' = 0{,}0000039$,
$\alpha_V'' = 0{,}0000041$.

Bei der Belastung 0 ist die ideelle Elastizität des Verbundkörpers der Hennebique-Decke $E_0 = 406000$ oder $\alpha_0 = 0{,}0000025$. Die durchschnittliche Elastizität des Balkens verdoppelt sich daher nahezu (von $25 \cdot 10^{-7}$ bis $49 \cdot 10^{-7}$) vom belastungslosen Zustand bis zur aufgebrachten Last von $2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$.

56. Vergleich der graphisch ermittelten mit den gemessenen Senkungen. Tabelle der Senkungen in mm.

Tabelle V.

Belastungsfall		I.	II.	III.	IV.	V.
Senkung im Punkt	Belastung kg/m²	Eigengewicht	+ 400	+ 800	+ 1200	+ 2000
1	Messung	—	—	—	—	5,7 bis 9,24
	Mittel	—	—	—	—	7,44
	Schwankung	—	—	—	—	17%
	graphisch	—	1,8	3,2	5.0	8,0
2	Messung	—	—	—	—	9,24 bis 14,09
	Mittel	—	—	—	—	11,47
	Schwankung	—	—	—	—	16%
	graphisch	—	3,2	5,6	8,5	13,5
3 (Mitte)	Messung	—	1,52 bis 1,70	2,90 bis 4,1	6,7 bis 8,3	13,8 bis 16,2
	Mittel	—	1,61	3,52	7,56	14,82
	Schwankung	—	12%	4%	8%	13%
	graphisch	1,6 (0)	3,7 (2,1)	6,6 (5,0)	10,0 (8,4)	16,0 (14,4)

Zum Vergleich eignen sich vornehmlich die für den Belastungsfall V und die für die Mitte des Trägers wiedergegebenen Resultate.

Vergleich der Senkungen bei Belastung V.

Die bleibende Senkung von Belastung V in Punkt 3 (Mitte) betrug im Mittel 1,9 mm; rechnen wir für Punkt 1 und 2 die gebliebenen Senkungen nach dem Verhältnis der Senkungen im Punkt 3, so erhalten wir

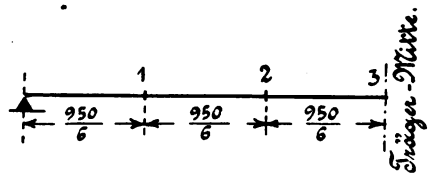


Fig. 34.

die bleibende Senkung in Punkt 1 $\delta_{b1} = \frac{7{,}44}{14{,}82} \cdot 1{,}9 = 0{,}95$ mm,

„ „ „ „ „ 2 $\delta_{b2} = \frac{11{,}47}{14{,}82} \cdot 1{,}9 = 1{,}40$ „

Darnach wären die totalen Senkungen bei Belastung V

im Punkte 1 $\delta_1 = 7{,}44 + 0{,}95 = 8{,}39$ mm,

„ „ 2 $\delta_2 = 11{,}47 + 1{,}40 = 12{,}87$ „

„ „ 3 $\delta_3 = 14{,}82$ „

Vermindern wir die durch Zeichnung ermittelten Senkungen der Punkte 1 und 2 für Belastung V um die Senkungen δ_e infolge des

Eigengewichts nach dem Verhältnis der Senkungen für Punkt 3, so erhalten wir die graphisch ermittelten Senkungen δ' der Punkte 1 und 2 abzüglich jener des Eigengewichts.

Die Eigengewichtssenkungen betragen

$$\text{im Punkte } 1 \quad \delta_{e1} = \frac{1{,}6}{16{,}0} \cdot 8{,}0 = 0{,}80 \text{ mm},$$

$$\text{„ „ } 2 \quad \delta_{e2} = \frac{1{,}6}{16{,}0} \cdot 13{,}5 = 1{,}35 \text{ „}$$

Die graphisch ermittelten Senkungen infolge der aufgebrachten Last V sind also

$$\delta_1' = 8{,}0 - 0{,}8 = 7{,}20 \text{ mm},$$
$$\delta_2' = 13{,}5 - 1{,}35 = 12{,}15 \text{ „}$$
$$\delta_3' = 16{,}0 - 1{,}6 = 14{,}40 \text{ „}$$

Die Differenzen zwischen den auf die gleichen Verhältnisse reduzierten gemessenen und graphisch ermittelten Durchbiegungen sind demnach

$\delta_1 - \delta_1' = 8{,}39 - 7{,}20 = 1{,}19$ mm oder 14 % der Messungswerte,
$\delta_2 - \delta_2' = 12{,}87 - 12{,}15 = 0{,}72$ „ „ 6 % „ „
$\delta_3 - \delta_3' = 14{,}82 - 14{,}40 = 0{,}42$ „ „ 3 % „ „

Vergleich der Senkungen der Balkenmitte bei verschiedenen Belastungen:

Die Differenzen der gemessenen Senkungen und der graphisch ermittelten im Punkte 3 sind beim Belastungsfall

II. $\delta_{II} - \delta_{II}' = 1{,}61 - 2{,}1 = -0{,}49$ mm oder -23 % der Messungswerte,
III. $\delta_{III} - \delta_{III}' = 3{,}52 - 5{,}0 = -1{,}48$ „ „ -29 % „ „
IV. $\delta_{IV} - \delta_{IV}' = 7{,}56 - 8{,}4 = -0{,}84$ „ „ -11 % „ „
V. $\delta_V - \delta_V' = 14{,}82 - 14{,}4 = +0{,}42$ „ „ $+3$ % „ „

57. Folgerungen aus dem Vergleich.

Aus dem Vergleich ist ersichtlich, daß die Differenzen bei höheren Spannungen kleiner werden. Da die Senkungen bei kleineren Beanspruchungen viel allmählicher ihren Endwert erreichen — bei Belastung III von 3,0 bis 4,05, d. i. 26 % Vergrößerung der Senkungen; bei Last V von 14,2 bis 15,25, d. i. nur 7 % Vergrößerung der Senkungen in derselben Zeit — so ist der Schluß berechtigt, daß die Herstellung des inneren Gleichgewichts bei niedrigen Spannungen sich noch viel langsamer als bei höheren Spannungen vollzieht.

Die Unterschiedswerte in Abs. 56 (Senkungen in Balkenmitte) gestalten sich wesentlich anders, wenn die letzten Messungen zum Vergleich herangezogen werden. Nach diesen betragen die Unterschiede bei der Belastung

III. — 19 %,
IV. — 2,4 %,
V. + 5 %.

Daraus ist eine Wanderung der negativen Differenzen gegen das Positive zu erkennen.

Bezüglich der betrachteten Zahlenwerte ist noch zu bemerken, daß die Differenzen in den zusammengehörigen Meßwerten (d. i. in Messungen zu gleicher Zeit und an analogen Punkten beider Hauptträger) bis zu 17 %, durchschnittlich etwa 8 % betragen, während die Differenzen von Messungen und Ermittlungen bis — 29 % (bezw. — 19 %), im Mittel — 5/% (bezw. + 1 %) ausmachen. Die Übereinstimmung ist demnach innerhalb der natürlichen Schwankungen als sehr gut zu bezeichnen.

Großen Einfluß auf die Senkungen haben die bleibenden Formänderungen und die Zeit. Erst nach Verlauf mehrerer Tage nimmt der Träger jene Durchbiegung an, die er unter der Last beibehält. Daher sollten die Senkungen erst dann bestimmt werden, wenn vollständige Ruhe eingetreten ist, da früher ermittelte Werte nur Zwischenstadien der Deformation vom unbelasteten zum belasteten Träger geben. Wie weit sich in dieser Zeit die bleibenden Dehnungen oder Stauchungen verändern und somit ihrerseits die Biegung beeinflussen, kann nur durch systematisch und genau durchgeführte Versuche ermittelt werden. Es ist klar, daß der Boden, auf dem solche Betrachtungen und Studien in Ermanglung konkreter Tatsachen angestellt werden können, noch ein ziemlich schwankender ist; im allgemeinen wird man jedoch aus dem Ergebnis des Vergleichs von Versuch und Rechnung folgern dürfen, daß die Voraussetzungen, also die Grundlage für die ganze Untersuchung, im wesentlichen mit den tatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen, ja höchstwahrscheinlich einen Genauigkeitsgrad erreichen, welcher sich jenem bei der Berechnung konstant elastischer Balken stark nähert.

γ) Spannungen und Senkungen nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze des Eisens und der Zugfestigkeit des Betons bis zum Einsturz. (T.-Fig. 19—22.)

58. Grundlagen.

Nach den Erfahrungen mit armiertem Beton wird man es als eine Tatsache betrachten können, daß sich derselbe bis zur Proportionalitätsgrenze des Eisens, also bis etwa 0,001 Dehnung, verlängert, wobei er Spannungen bis ca. $26 \frac{kg}{cm^2}$ aufnimmt und erst in der Periode der Eisendehnungen reißt, in welcher diese im Verhältnis zu den zunehmenden Spannungen sehr groß werden, d. h. nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze. Jedenfalls hört die Zugfestigkeit des Betons auf, wenn Dehnungen von etwa 0,002 oder noch mehr auftreten.

Es ist demnach berechtigt, für das zweite Stadium die Zugfestigkeit des Betons außer Rechnung zu stellen, da, wenn dessen Widerstand in der Nähe der Nullinie auch noch vorhanden, das Moment desselben nur sehr klein sein kann.

Die Betondruckkurve *B* für den vorliegenden Fall (T.-Fig. 19) wurde bis $200\ \frac{kg}{cm^2}$ nach dem Gesetze $\varepsilon = \frac{1}{457000} \cdot \sigma^{1,157}$ aufgetragen, wobei bemerkt wird, daß diese Gleichung, da aus Spannungen in den üblichen Grenzen $\left(\text{bis } 50\ \frac{kg}{cm^2}\right)$ gefunden, nur für diese gilt, in Ermanglung einer andern Beziehung aber verwendet werden mußte. Dazu ist die $n = 6{,}83$fach verbreitete Betonkurve eingezeichnet.

Von hervorragendem Einfluß auf den Bruch des Trägers ist die Linie, welche die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung des Eisens ausdrückt. Sie ist neben der Druckfestigkeit des Betons der wichtigste Faktor, der sich unmittelbar aus den in großer Zahl angestellten Zugversuchen des Eisens bestimmen ließe, wenn nicht noch eine dritte Variabele, die Zeit, hinzuträte. Es ist festgestellt, daß die Zugfestigkeit eines Stabes durch die Zeitdauer des Versuches beeinflußt wird, derart, daß einer raschen Probe höhere Festigkeit — bis 15 % — und geringere Dehnung — bis 33 % — entspricht. (Französische Versuche, mitgeteilt von Bach.) Demgemäß muß die Spannungslinie des Eisens (hauptsächlich oberhalb der Proportionalitätsgrenze) steiler oder flacher verlaufen, je nachdem der Stab rascher oder langsamer gezogen wird. Wird nun ein armierter Balken langsam belastet, so wird sich die Dehnung des eingelagerten Eisens nach der flachen Kurve vollziehen, bei rascher Aufbringung der Last jedoch nach der steilen Kurve, und zwar in um so höherem Maße, je plötzlicher die äußeren Kräfte einwirken — entsprechend einem raschen Zugversuche — weil die inneren Kräfte des Balkens, also die jetzt betrachteten Eisenspannungen, zusammen mit den Betondrücken, den äußeren jederzeit und unter allen Umständen das Gleichgewicht halten, daher mit diesen langsam oder plötzlich wachsen müssen, solange der Träger im Gleichgewicht, d. h. nicht eingestürzt ist. Bleiben die äußeren Kräfte entsprechend lange wirkend, dann tritt eine Dehnung des Eisens so lange ein, bis dieselbe eine der Qualität des Materials entsprechende bestimmte Größe erreicht hat. Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen wird dann durch eine flacher werdende Linie dargestellt werden können.

Analoge Verhältnisse dürften auch bei dem auf Druck beanspruchten Beton vorhanden sein, indem die Betondruckkurve bei rascher Belastung steiler verläuft.

Aus diesen Betrachtungen kann geschlossen werden, daß die Bruchlast wesentlich von der Raschheit der Belastung abhängen wird und zwar wegen des Zusammenhanges von Beton- und Eisenspannungen in viel höherem Maße als z. B. beim Zugversuch. Die absolute Bruchlast wäre jene, die bei unendlich langsamer Belastungszunahme den Träger zu zerbrechen vermöchte. Es erscheint wünschenswert, daß Bruchversuche auch in diesem Sinne ausgeführt würden.

59. Die Spannungsflächen.

Die Spannungskurven des Eisens und Betons bei Versuchen verschiedener Belastungsgeschwindigkeit sind noch nicht ermittelt. Behufs Auffindung der relativen Bruchlasten ist man daher zu einer Annahme der mutmaßlichen Deformationslinien gezwungen.

In der T.-Fig. 20 sind drei solcher Linien für das Eisen eingezeichnet und zwar I für schnelle, III für langsame Belastung (letztere aus Versuchen Bachs), dazwischen eine mittlere Kurve. Wahrscheinlich verläuft die Spannungslinie für plötzliche Belastung noch bedeutend steiler als I.

Zu den Linien I, II und III, sowie für die Betonkurve 3 (T.-Fig. 1) sind in T.-Fig. 19 die bezüglichen Spannungsflächen ermittelt und zwar bei einer Betonspannung von $\sigma_0 = 292$ (in der Zeichnung nicht ersichtlich), $\sigma_1 = 200, \sigma_2 = 108$ und $\sigma_3 = 67 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ auf dem früher besprochenen Wege.

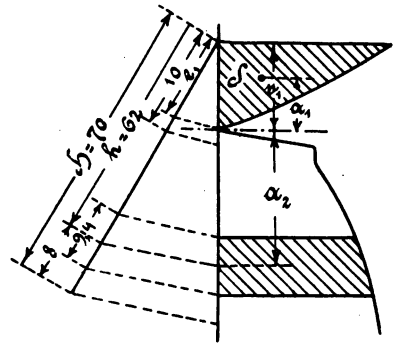


Fig. 35.

Zusammengehörige Spannungsflächen sind:

Bei der Eisenkurve I:

Druckfläche $O1B_1$, Zugfläche 1_I1_I, Beton-Spannung $\sigma_1 = 200$,
„ O_2 „ 2_I2_I „ $\sigma_2 = 108$,
„ O_3 „ 3 „ $\sigma_3 = 67$,

Bei der Eisenkurve II:

Druckfläche $O1B_1$, Zugfläche $1_{II}1_{II}$, Beton-Spannung $\sigma_1 = 200$,
„ O_2 „ $2_{II}2_{II}$ „ $\sigma_2 = 108$

u. s. w.

In der Zeichnung sind die Spannungen nnd Dehnungen des Eisens gegenüber jenen des Betons 10fach verkürzt. Die Momente derselben sind daher nicht durch die Seillinie, sondern aus der Beziehung ermittelt

$$\mathfrak{M} = f(a_1 + a_2)$$
$$M = 60 \cdot m^2 \cdot \mathfrak{M}.$$

Tabelle VI.

Spannungsfläche	0			1			2			3
Eisenkurve	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I, II u. III
σ_d	292	292	292	200	200	200	108	108	108	67
σ_e	3200	2740	2400	2880	2300	2020	2320	2000	2000	2000
$\frac{e_1}{e_2}$	0,074	0,061	0,056	0,100	0,080	0,070	0,131	0,129	0,129	0,21
$e_1 + a_2$	17,9	21,7	23,8	8,8	11,0	12,6	3,35	3,5	3,5	12.0
f_1	390	390	390	175	175	175	48,7	48,7	48,7	15,7
f_2	39,0	39,0	39,0	17,5	17,5	17,5	4,87	4,87	4,87	15,7
a_1	10,0	10,0	10,0	6,6	6,6	6,6	3,3	3,3	3,3	1,9
a_2	16,4	20,2	22,3	7,8	10,0	11,6	2,85	3,0	3,0	9,1
e_1	15,0	15,0	15,0	10,0	10,0	10,0	5,0	5,0	5,0	2,9
$a_1 + a_2$	17,4	21.2	23,8	8,46	10,66	12,26	3.18	3,33	3,33	11,0
M in mt	208,2	162,6	147,0	176,4	140,4	125,4	127,2	121,8	121,8	108,6
k	129	101	91	109	87	77	79	75	75	67
e_1	5,2	4,3	3,9	7,0	5,6	4,9	9,3	8,9	8,9	15,0
ε_1	0,0015	0,0015	0,0015	0,001	0,001	0,001	0,0005	0,0005	0,0005	0,00029
$\frac{\varepsilon_1}{e_1}$	$290 \cdot 10^{-6}$	$350 \cdot 10^{-6}$	$380 \cdot 10^{-6}$	$143 \cdot 10^{-6}$	$178 \cdot 10^{-6}$	$204 \cdot 10^{-6}$	$54 \cdot 10^{-6}$	$56 \cdot 10^{-6}$	$56 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-6}$

Wie früher ist (Fig. 35)

$$m = \frac{H}{\mathfrak{H}} = \frac{h}{e_1 + a_2}.$$

Die Werte $e_1 + a_2$ und $a_1 + a_2$ sind mit Ausnahme von Punkt 3 ($\sigma_d = 67$) gebildet aus $\frac{e_1}{10} + a_2$ und $\frac{a_1}{10} + a_2$.

Ferner ist $f_2 = \frac{f_1}{10}$.

Die Zusammenstellung in Tabelle VI gibt die aus der T.-Fig. 19 gewonnenen Werte.

60. Darstellung der Resultate.

Die in Tabelle VI. genannten Werte M, σ_d und σ_e sind in T.-Fig. 21 zu mehreren Liniensystemen zusammengestellt, für welche die Momente M die senkrechten Abszissen, σ_d bezw. σ_e die wagrechten Ordinaten sind, wobei die Ursprungspunkte für die Werte der 3 Kurven I, II und III schräg verschoben sind (O_I, O_{II} und O_{III}). Dadurch erhält man die Linien der Betonspannungen σ_{dI}, σ_{dII} und σ_{dIII}, sowie die Linien der dazugehörigen Eisenspannungen σ_{eI}, σ_{eII} und σ_{eIII}. Letztere sind aus zeichentechnischen Gründen nach rechts verschoben, was im Eisenspannungs-Maßstab erkennbar ist (der O-Punkt der Eisenspannung fällt mit Teilstrich 130 der Betonspannung zusammen). Hieraus lassen sich die Spannungen finden, welche den Momenten $M = 108{,}6$ mt (d. i. jenes Moment durch die Trägerbelastung, bei welchem die Zugfestigkeit des Betons überwunden und die Proportionalitätsgrenze des Eisens erreicht wird), $M = 120$, 130, 140, 150, 160 und 170 mt entsprechen. Die Spannungen, welche bei diesen Momenten entstehen, sind durch krumme Linien dargestellt, aus denen ihre Werte bei beliebiger Eisenkurve (zwischen I und III) entnommen werden können. Außerdem sind in T.-Fig. 21 die Eisen- und Betonspannungen σ_d und σ_e vor dem Erreichen der Proportionalitätsgrenze des Eisens und vor dem Zerreißen des Betons veranschaulicht (aus T.-Fig. 16). Die beiden Kurvenpaare reichen selbstverständlich ineinander, ebenso die Linien der $\frac{\varepsilon}{e}$.

In T.-Fig. 22 sind 2 Biegungslinien in Bezug auf die Betonkurve 3 (OB) und die Eisenlinie I, sowie bezüglich einer anderen (steileren) Betonkurve OB' (T.-Fig. 19) und derselben Eisenkurve konstruiert, wenn die aufgebrachte Last 3000 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ beträgt.

61. Folgerungen.

Aus der Zeichnung (T.-Fig. 21) ist vorerst ersichtlich, daß wir

von einer bestimmten Bruchbelastung schlechterdings nicht reden können, falls die Zeitdauer der Belastung und ihre Aufbringung (ob plötzlich oder langsam) nicht näher angegeben sind. Halten wir die von der mechanischen Versuchsanstalt in Lemberg gefundene höchste Druckfestigkeit von etwa 190 $\frac{kg}{cm^2}$ fest, so finden wir für Kurve I (d. i. jene Eisendehnungslinie, die vielleicht in der dritten Stunde nach Aufbringung der Last die Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen angibt) die Größe des Bruchmoments mit 172 mt, das einer aufgebrachten Last von 3160 $\frac{kg}{m^2}$ entspricht, wobei die Zugspannung des Eisens 2820 $\frac{kg}{cm^2}$ beträgt. Für die Kurve II (die etwa nach 2 Tagen für die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen gilt) ist das Bruchmoment 140 mt, das aus einer Belastung mit 2450 $\frac{kg}{m^2}$ resultiert. Die Eisenspannung ist hierbei 2270 $\frac{kg}{cm^2}$. Bezüglich der Eisenkurve III, welche die schließlichen und nicht mehr wachsenden Längenänderungen angeben soll, und die vielleicht 8 Tage oder noch später nach der Belastung eintritt, ergibt sich ein Bruchmoment von 126 mt infolge 2170 $\frac{kg}{m^2}$ Belastung, der eine Eisenspannung von 2020 $\frac{kg}{cm^2}$ entspricht, falls der Beton in der Zugzone schon gerissen ist. Andernfalls ist das Bruchmoment 132 mt mit einer Eisenspannung von 2000 $\frac{kg}{cm^2}$ bei einer aufgebrachten Last von etwa 2300 $\frac{kg}{m^2}$ (die letzteren Werte sind als die wahrscheinlicheren zu betrachten, da die Betonzugspannungen bis zur Proportionalitätsgrenze des Eisens wirksam angenommen werden können). Darnach fiele der Bruch mit dem Reißen des Betons und mit dem gleichzeitigen Überschreiten der proportionalen Eisenspannungen zusammen.

Die Betondruckspannungen schnellen von 80 auf 238 $\frac{kg}{cm^2}$ empor, die Eisenspannungen steigen von 2000 auf 2080 $\frac{kg}{cm^2}$, der Bruch müßte also bei Beginn des Streckens des Eisens infolge Zermalmens des Betons eintreten (s. Tabelle).

Tabelle VII.

Aufgebrachte Last	Momente	Betondruckspannungen kg/cm²				Eisenspannungen kg/cm²			
		Zugzone intakt	Zugzone zerrissen			Zugzone intakt	Zugzone zerrissen		
kg/m²	mt	σ_d	σ_{dI}	σ_{dII}	σ_{dIII}	σ_e	σ_{eI}	σ_{eII}	σ_{eIII}
400	·	29	—	—	—	405	—	—	—
800	·	37	—	—	—	740	—	—	—
1200	· ·	48	—	—	—	1080	—	—	—
1800	108	65	68	68	68	1600	2000	2000	2000
2000	·	70	—	—	—	1760	—	—	—
2050	120	71	100	100	104	1800	2200	2000	2000
2170	**126**	·	·	·	**190**	·	·	·	2020
2260	130	77	111	140	228	1970	2360	2040	2050
2300	**132**	80	·	·	(238)	**2000**	·	·	2080
2470	**140**	—	124	**190**	(270)	—	2480	2280	2240
2680	150	—	140	(240)	(300)	—	2590	2480	2470
2890	160	—	160	(280)	(330)	—	2700	2660	2690
3100	170	—	184	(306)	(354)	—	2800	2860	2870
3160	**172**	—	**190**	·	·	—	2820	·	·

Wir ersehen daraus, daß der Hennebique-Balken auf eine gewisse Zeit (2 bis 3 Stunden) die Belastung von 3160 $\frac{kg}{m^2}$, wahrscheinlich eine noch größere Last durch eine kleinere Zeitdauer (etwa 3500 $\frac{kg}{m^2}$ eine Viertelstunde) getragen hatte, daß jedoch andernfalls eine Belastung von rund 2300 $\frac{kg}{m^2}$, möglicherweise schon eine solche von 2170 $\frac{kg}{m^2}$ nach längerer Zeit den Träger zum Einsturz gebracht hätte. Die Schwankungen der Bruchlast betragen demnach sicher mindestens $3160 - 2300 = 860 \frac{kg}{m^2}$ oder fast 29 % der im Bericht (Z. d. ö. I. u. A.-V.) als Bruchlast bezeichneten Belastung von 3000 $\frac{kg}{m^2}$, welche 6 Stunden auf der Decke lag. Hätte man daher die Belastung von 3000 kg nicht plötzlich aufgebracht, sondern die Last langsam erhöht, so wäre die Bruchlast schon viel früher erreicht worden. Die als Bruchlast bezeichneten 3000 kg sind sonach ein ziemlich willkürlicher Zwischenwert der kleinsten und größten Bruchlast und berechtigen infolgedessen zu keinen besonderen Schlüssen. Da die Decke für eine Nutzlast von

$400 \frac{kg}{m^2}$ berechnet war, so ist ihr Sicherheitsgrad gegen Einstürzen

$$m = \frac{2300}{400} = 5\frac{3}{4}, \text{ oder nur } \frac{2170}{400} = 5{,}4,$$

während aus der Probebelastung derselbe sich mit

$$m = \frac{3000}{400} = 7\frac{1}{2} \text{ ergibt.}$$

Immerhin ist eine mehr als 5fache Sicherheit als vollständig genügend zu erachten.

Ein Vergleich der ermittelten Biegungslinie mit den gemessenen Senkungen nach $\frac{1}{2}$ stündiger Belastung mit $3000 \frac{kg}{m^2}$ zeigt, daß diese bedeutend geringer waren als die auf Grund der Eisenkurve I und der Betonkurven OB und OB' gefundenen (gemessen rund 40 gegen 63, bezw. 70 mm graphisch). Dies bestätigt die früher ausgesprochene Ansicht, daß die Dehnungskurve des Eisens und wahrscheinlich auch die Stauchungskurve des Betons zu dieser Zeit noch viel steiler als die eingezeichneten Linien verlaufen sein müssen.

62. Die Ursachen des Einsturzes.

Aus Tabelle VII und aus T.-Fig. 21 ist zu entnehmen, daß die Druckfestigkeit des Betons für jede der drei Eisenkurven früher erreicht wird als die Zugfestigkeit des Eisens. Bei sehr rascher hoher Belastung — steile Kurven — ist aber auch der Fall möglich, daß das Reißen des Eisens vor dem Zerdrücken des Betons eintritt, ferner auch dann, wenn die Druckfestigkeit des Betons eine sehr große ist, oder wenn die Druckzone entsprechend stark armiert wird.

Wird die Druckfestigkeit überwunden, d. h. hören die Normaldruckkräfte auf, so tritt ein vollkommen neuer statischer Zustand ein. Aus dem auf Biegung beanspruchten Balken entsteht für eine sehr kleine Zeit ein durch die Eisenstäbe gebildetes Seil, dessen Spannungen die Zugfestigkeit überschreiten müssen; daher tritt der Einsturz nach Zerreißen des Eisens ein, wie der Bruchversuch zeigt. Aus diesem Übergangszustand, der im selben Querschnitt an verschiedenen Punkten wegen der Ungleichheit des Materials nicht im selben Augenblick eintreten wird, sind die beobachteten Deformationen der Widerlager teilweise zu erklären.

Für den Fall, daß das Eisen zuerst zerrissen wird, tritt damit gleichzeitig auch der Einsturz der Konstruktion ein.

Anmerkung. Der Einsturz könnte auch durch zu hohe vertikale oder horizontale Schubspannungen hervorgerufen werden, doch soll in diesem Abschnitt darauf nicht näher eingegangen werden (s. Abs. 81). —

Die mittlere Elastizität des Balkens bei 3000 kg/m² Belastung beträgt unter Zugrundelegung einer Senkung von etwa 50 mm in der Mitte analog der Ableitung in Abs. 55

$$E = \frac{Ql^3}{75 \cdot J \cdot \delta} = \frac{139000 \cdot 865000000}{75 \cdot 3462000 \cdot 5} = 93000.$$

II. Abschnitt.

Einflüsse von Biegungsmomenten und Normalkräften.

63. Einleitung.

Wir haben im I. Abschnitt dieser Abhandlung die Spannungen und Deformationen in Stäben untersucht, wenn auf dieselben nur Biegungsmomente einwirken. Im folgenden wollen wir nach denselben Grundsätzen die Beanspruchung eines Stabes ermitteln, wenn derselbe außerdem unter dem Einfluß einer Normalkraft (meistens Druck) steht.

Während in Konstruktionen aus konstant elastischen Stoffen die inneren Kräfte und die Formänderungen durch die algebraische Summe der einzeln ermittelten Momenten- und Normalkrafteinflüsse gefunden werden — entsprechend dem Grundsatz von der Proportionalität der äußeren und inneren Kräfte, sowie der Deformationen — kann die Aufgabe mit Bezug auf die veränderlich elastischen Materialien auf diesem Wege nicht gelöst werden; es wird vielmehr der Spannungszustand unter gleichzeitiger Betrachtung beider Einwirkungen zu ermitteln sein.

a) Spannungen.

64. Bestimmung der Momente und Normalkräfte aus bekannten Spannungsflächen.

Unter der Einwirkung eines Moments und einer Normalkraft sollen die Spannungsflächen OQB und $OB'Q'SS'$ (Fig. 36) entstehen. Das Moment der äußeren Kräfte wird auf eine beliebige Querschnittsachse C bezogen, welcher die Linie $c — c$ entspricht. Auf dieselbe Achse ist das Moment der inneren Kräfte zu bestimmen. Es ist $\mathfrak{M} = A \cdot E$.

Die Normalkraft ist ausgedrückt durch

$$\mathfrak{N} = f_n = f_1 - f_2.$$

Das vorhandene Moment auf 1 cm Querschnittsbreite ist

$$M = m^2 \cdot A \cdot E, \text{ wobei } m = \frac{H}{\mathfrak{H}},$$

und die vorhandene Normalkraft ist

$$N = m \cdot \mathfrak{N} = m f_n = m (f_1 - f_2).$$

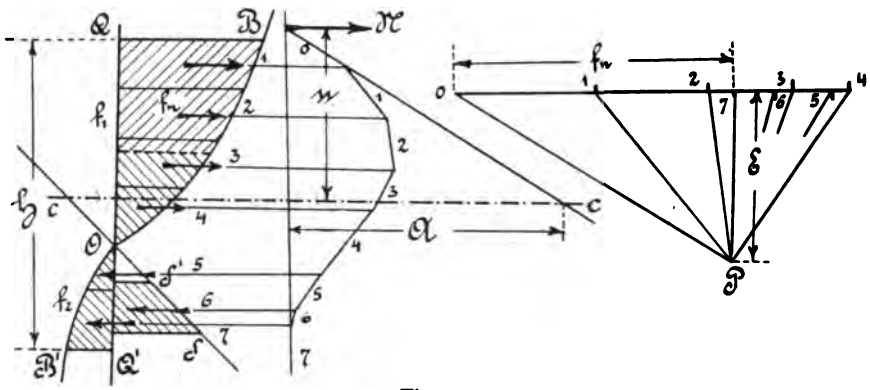


Fig. 36.

Aus dem Schnittpunkt der Endseilstrahlen (0 und 7) erhält man den Angriffspunkt der Normalkraft, deren Abstand von C durch $\mathfrak{n}$ gegeben ist. Der wirkliche Abstand ist

$$n = m \cdot \mathfrak{n}.$$

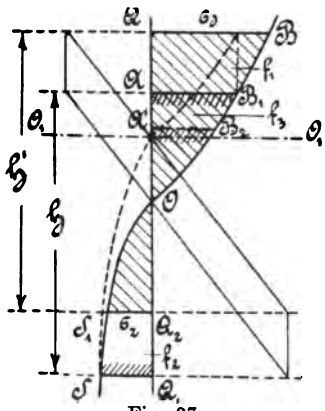


Fig. 37.

Ferner muß auch

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{M}, \text{ oder}$$

$$m\mathfrak{N} \cdot m\mathfrak{n} = m^2 \mathfrak{M},$$

$$N \cdot n = M.$$

65. Bestimmung der Spannungen für gegebene Momente und Normalkräfte.

Man ermittelt vorerst durch Versuch die Spannungsflächen für das gegebene äußere Moment nach dem früher beschriebenen Verfahren, ohne vorläufig die Normalkraft zu berücksichtigen (Fig. 37, Flächen OAB_1 und OSQ_1). Sodann fügt man an AB_1 die Fläche $AB_1BQ = f_1$ hinzu und verringert die Fläche OSQ_1 auf OS_1Q_2. Die Differenz $OSQ_1 - OS_1Q_2 = f_2$. Um dasselbe Maß wird auch OAB_1

verkleinert, so daß die Fläche OA_1B_2 entsteht. Die Differenz beider Flächen sei f_3. Es wird also

$$f_2 = f_3.$$

Wir machen nun

$$f_1 + f_3 = \mathfrak{N} \text{ der Normalkraft}$$

und das Moment von f_1 gleich dem Moment von f_2 in Bezug auf die ursprüngliche Nullinie, die jedoch in der Zeichnung nach $O_1 — O_1$ verschoben ist, also

$$\mathfrak{M}_{f1} = \mathfrak{M}_{f2}.$$

Die Lage der Nullinie ergibt sich aus der Figur; die ursprüngliche Spannungskurve ist gestrichelt eingezeichnet. Es ist zu erkennen, daß das Moment der neuentstandenen Spannungsflächen OQB und OS_1Q_2 gleich dem Moment der anfangs ermittelten Spannungsflächen in Bezug auf die ursprüngliche Nullinie $O_1 — O_1$ ist, da $\mathfrak{M}_{f1}$ hinzugekommen, $\mathfrak{M}_{f2}$ weggenommen und $\mathfrak{M}_{f1} = \mathfrak{M}_{f2}$.

Ist es gelungen f_1 und f_2 nach dieser Bedingung zu wählen, wobei der Einfluß der Differenz $\mathfrak{H} — \mathfrak{H}'$ zu berücksichtigen ist, so sind die Spannungen σ_d und σ_z ermittelt. Andernfalls ist das Verfahren zu wiederholen.

In der Regel wird das folgende Verfahren bequemer sein, besonders dann, wenn die Spannungen für verschiedene Werte von M und N ermittelt werden sollen; diese Aufgabe dürfte häufig vorliegen, besonders bei der Untersuchung von Gewölben, exzentrisch belasteten Säulen und dergl.

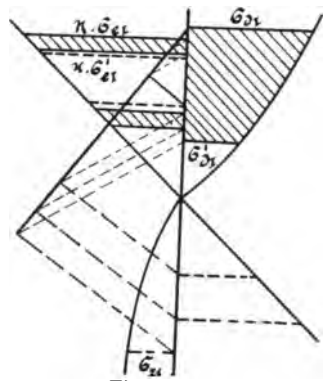


Fig. 38.

Der Vorgang sei hiermit erläutert: Man bestimmt die Momente und Normalkräfte für eine Anzahl im allgemeinen beliebig gewählter Spannungsflächen nach der im Abs. 64 gegebenen Methode, indem man für ein konstantes $\sigma_{d\,I}$ mehrere $\sigma_{z\,I}$ (oder $\sigma_{d\,I}'$) annimmt (Fig. 38), für die bezüglichen Spannungsflächen die reduzierten Momente und Normalkräfte N_I aufsucht, diese als Abszissen und Ordinaten zu einer Linie aufträgt und gleichzeitig die dazu gehörigen Beton- und Eisenspannungen $\sigma_{d\,I}$, $\sigma_{d\,I}'$, $\sigma_{z\,I}$, $\sigma_{e\,I}$ durch Kurven darstellt (Fig. 39). Sodann nimmt man ein anderes $\sigma_{d\,II}$ und hierzu mehrere $\sigma_{z\,II}$ (oder $\sigma_{d\,II}'$) an. Die nunmehr erhaltenen Werte werden in einer zweiten Kurvenserie dargestellt, deren Ursprung gegen den früheren angemessen verschoben ist (O_{II}). Alsdann kann für ein $\sigma_{d\,III}$ der Vorgang wiederholt werden.

Dadurch erhält man mehrere krumme Flächen, aus denen beliebige Zwischenwerte entnommen werden können. — Zu bemerken ist, daß die Momenten-Achsen für alle Spannungsflächen die verhältnismäßig gleiche Lage haben müssen, daß also $\frac{e_1}{e_2}$ konstant sein muß, wenn e_1 und e_2 die Entfernungen der Ränder des Querschnitts von der angenommenen Achse bedeuten, auf welche auch die äußeren Momente zu beziehen sind.

In derselben Weise können auch die Werte $\frac{\varepsilon}{e}$ und die spezifischen Querschnittsverschiebungen $\frac{\Delta ds}{ds}$ zu Kurven zusammengestellt werden. Unter Δds sind die Längenänderungen eines Stabfaser-Differenzials, z. B. in der geometrischen Achse des Stabes, verstanden, welche aus den Spannungsflächen abgegriffen werden können.

Aus der Fig. 39 lassen sich dann für beliebige Momente und Normalkräfte alle Spannungen und Deformationen entnehmen, welche unter dem

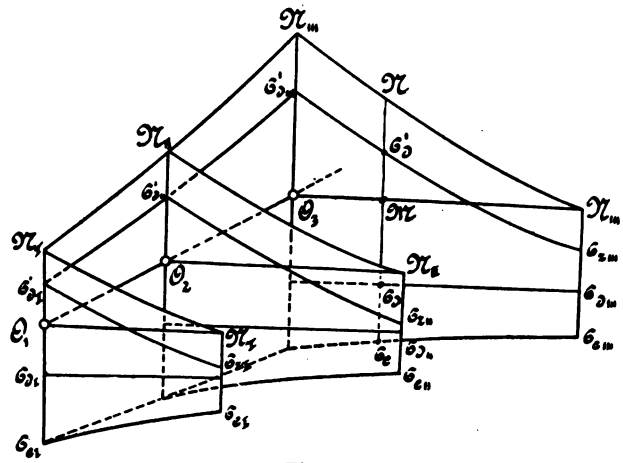


Fig. 39.

zu untersuchenden Träger von einer Geraden als Ordinaten zu krummen Linien aufgetragen werden können.

66. Allgemeiner analytischer Weg zur Spannungsermittlung in Verbundkörpern.

An die graphische Ermittlung der Spannungen aus Biegungsmomenten und Normalkräften anschließend, soll hier noch kurz die analytische Methode ihrem Wesen nach gegeben werden, um die allgemeine Lösbarkeit der Aufgabe zu zeigen.

Die Druck- und Zugkurven der beiden Verbundstoffe sind durch die Linien $O1$, $O2$, $O3$ und $O4$ dargestellt (Fig. 40) und durch ihre Gleichungen gegeben:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= f_1(\sigma_1) \\ \varepsilon_2 &= f_2(\sigma_2) \\ \varepsilon_3 &= f_3(\sigma_3) \\ \varepsilon_4 &= f_4(\sigma_4) \end{aligned}\right\} \quad \text{(a.)}$$

Die Spannungen σ lassen sich ausdrücken durch (vgl. Abs. 3, Gl. 2)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= F_1(y_1) \\ \sigma_2 &= F_2(y_2) \\ \sigma_3 &= F_3(y_3) \\ \sigma_4 &= F_4(y_4) \end{aligned}\right\} \quad \text{(b.)}$$

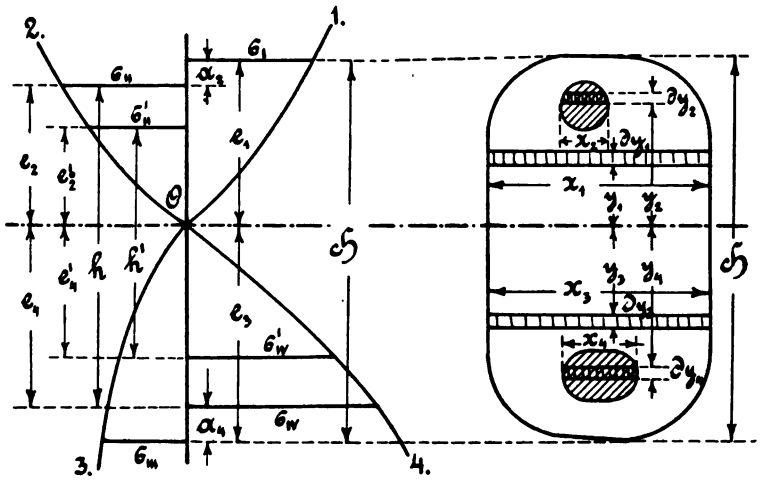


Fig. 40.

Nach entsprechenden Umformungen können sämtliche Randspannungen durch Funktionen einer Randspannung z. B. σ_{III} ausgedrückt werden.

$$\sigma_I = \varphi_1(\sigma_{III}) \qquad (1.)$$
$$\sigma_{II} = \varphi_2(\sigma_{III}) \qquad (2.)$$
$$\sigma_{II}' = \varphi_2'(\sigma_{III}) \qquad (3.)$$
$$\sigma_{IV} = \varphi_4(\sigma_{III}) \qquad (4.)$$
$$\sigma_{IV}' = \varphi_4'(\sigma_{III}) \text{ (vgl. Abs. 3, Gl. 4)} \qquad (5.)$$

Desgleichen werden sämtliche Spannungen σ als Funktion einer Randspannung dargestellt.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \psi_1(\sigma_{III})\\ \sigma_2 &= \psi_2(\sigma_{III})\\ \sigma_3 &= \psi_3(\sigma_{III})\\ \sigma_4 &= \psi_4(\sigma_{IV})\end{aligned}\right\} \text{(c.)}$$

(vgl. Abs. 3, Gl. 6.)

Die Nullinie und die äußere Normalkraft ergeben sich allgemein aus der Beziehung:

$$-D+Z=N,$$

worin D die Summe aller Druck-, Z die Summe aller Zugspannungen und N die auf den Querschnitt wirkende Normalkraft bedeutet.

Die Gleichung lautet:

$$-\left[\int_0^{e_1}\sigma_1\,dy_1\cdot x_1+\int_{e_2'}^{e_2}\sigma_2\,dy_2\cdot x_2\right]+\int_0^{e_3}\sigma_3\,dy_3\cdot x_3+\int_{e_4'}^{e_4}\sigma_4\,dy_4\cdot x_4=N \quad (6.)$$

Das Moment aller auf den Querschnitt wirkenden äußeren Kräfte ist dem Moment der inneren Spannungen auf dieselbe Achse (z. B. auf die Nullinie) gleich:

$$M=\int_0^{e_1}\sigma_1\,dy_1\,x_1\cdot y_1+\int_{e_2'}^{e_2}\sigma_2\,dy_2\,x_2\cdot y_2+\int_0^{e_3}\sigma_3\,dy_3\,x_3\cdot y_3+\int_{e_4'}^{e_4}\sigma_4\,dy_4\,x_4\cdot y_4 \quad (7.)$$

In den Gleichungen (6.) und (7.) sind die Werte σ_1, σ_2 ... aus (c.) einzusetzen.

Ferner ist

$$e_1+e_3=H \quad (8.)$$
$$e_2+e_4=h \quad (9.)$$
$$e_2'+e_4'=h' \quad (10.)$$
$$e_2+a_2=e_1 \quad (11.)$$
$$e_4+a_4=e_3 \quad (12.)$$

Für die Lösung der Aufgabe sind die Gleichungen (1.) bis (12.) vorhanden, aus denen die unbekannten Spannungen σ_I, σ_{II}, σ_{II}', σ_{III}, σ_{IV}, σ_{IV}' und die unbekannten Entfernungen e_1, e_2, e_2', e_3, e_4 und e_4', zusammen 12 Unbekannte berechnet werden können, wenn die Querschnittsabmessungen gegeben sind.

Die Gleichungen (1.) bis (12.) können auch zur Querschnittsbestimmung verwendet werden, wenn man die Gleichung (7.) mit Benutzung der Gleichungen (1.) bis (6.) und der Gleichungen (8.) bis (12.) unter Einführung bestimmter Verhältnisse für $H:h:h':a_2:a_4$ und der Annahme einer Querschnittsform nach H auflöst.

Hieraus folgt, daß die Spannungen oder die Dimensionen eines Verbundkörpers aus veränderlich elastischen Stoffen prinzipiell direkt, wie bei einem zusammengesetzten Träger aus konstant elastischem Material (genietetem Blechträger), gefunden werden können. — Wie weit der konkrete Weg der Rechnung dies zuläßt, soll hier nicht weiter erörtert werden (vergl. Ende Abs. 20).

b) Durchbiegungen.

67. Biegungslinie eines Bogens ohne Zwischengelenk.

Die Differenzialgleichung der Biegungslinie lautet allgemein:

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}.$$

$\frac{\Delta d\varphi}{dx} = q_1$ hängt von der Verdrehung zweier um $ds = \frac{dx}{\cos\varphi}$ entfernten Querschnitte ab.

$\frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx} = q_2$ betrifft den Einfluß auf die Durchbiegung infolge der Veränderung des Abstandes ds zweier Querschnitte um Δds.

Ermittelung des Wertes q_1.

Angenähert ist $\operatorname{tg}\Delta d\varphi = \frac{\varepsilon \cdot ds}{e} = \frac{\varepsilon}{e} \cdot \frac{dx}{\cos\varphi}$ (Fig. 41).

Daher $$q_1 = \frac{\Delta d\varphi}{dx} = \frac{\varepsilon}{e} \cdot \sec\varphi.$$

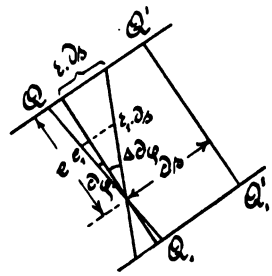


Fig. 41.

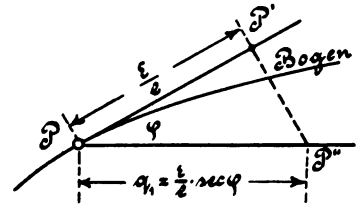


Fig. 42.

Hierin sind ε und e zusammengehörige, sonst aber beliebige Werte, da $\frac{\varepsilon}{e} = \frac{\varepsilon_1}{e_1} = \frac{\varepsilon_2}{e_2} = \ldots$

φ ist der Neigungswinkel des Bogenfaser-Differenzials gegen die Wagrechte. Das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{e}$ wird nach dem im Abs. 50 gegebenen Verfahren ermittelt. Denken wir uns für eine Anzahl Bogenpunkte die Werte $\frac{\varepsilon}{e}$ gefunden und in der Richtung der Tangente (Fig. 42) auf-

getragen, so ergibt sich die Größe $\frac{\varepsilon}{e} \cdot \sec \varphi$ aus

$$PP' = \frac{\varepsilon}{e} \sec \varphi = q_1.$$

Ermittlung des Wertes q_2.

$$q_2 = \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds} \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx},$$

$\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon$ der Längenänderung der Längeneinheit infolge Abstandsänderung der benachbarten Querschnitte in der geometrischen Bogenachse (Fig. 43).

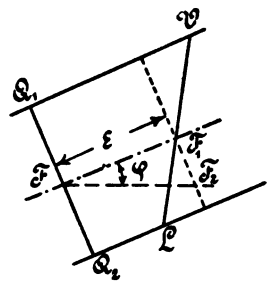


Fig. 43.

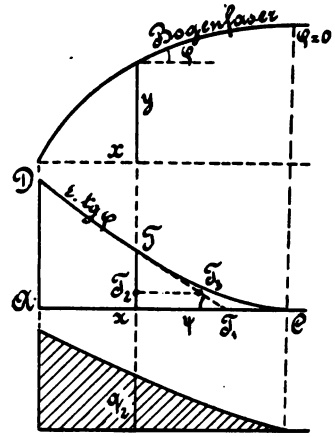


Fig. 44.

$$\frac{\Delta ds}{ds} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \varepsilon \operatorname{tg} \varphi = FF_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi = F_1 F_2,$$

$\varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi$ trägt man für eine Anzahl Bogenpunkte auf einer Geraden (Fig. 44) unter jenen zu einer Kurve DC auf.

$$\frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds} \cdot \operatorname{tg} \varphi\right)}{dx} = D\,(\varepsilon \operatorname{tg} \varphi),$$

d. h. q_2 ist der erste Differentialquotient der Funktion $\varepsilon \operatorname{tg} \varphi$.

Derselbe ist die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der Kurve DC gegen die Wagrechte. Konstruiert man in einer Anzahl von Punkten die Tangente TT_1, so ist $\operatorname{tg} \psi = D\,(\varepsilon \operatorname{tg} \varphi)$. Wählt man $T_2 T_3 = 1$, so ist

$$TT_2 = \operatorname{tg} \psi = q_2.$$

Werden nun die Werte TT_2 unter den Punkten T auf einer Geraden aufgetragen, so erhält man die Kurve der q_2.

Es ist AD der linksseitige Auflagerdruck eines Balkens auf zwei Stützen, der nach der Linie der q_2 belastet ist.

Trägt man die algebraische Summe $q_1 + q_2 = q$ zu einer Kurve auf, so ist diese die Belastungslinie eines Balkens auf zwei Stützen, dessen Biegungsmomente die Durchbiegungen des Balkens darstellen. Die Beiträge der q_2 sind positiv, die der q_1 können positiv oder negativ sein, je nach dem Drehungssinn der Momente in dem betrachteten Querschnitt.

68. Die Biegung eines Bogens mit Scheitelgelenk.

Ermittlung der Scheitelsenkung.

Die Senkung des Bogens im Scheitel hängt von den Längenänderungen Δs_1 und Δs_2 der Bogensehnen $K_1 S$ und $K_2 S$ (Fig. 45 und 46) sowie von der Nachgiebigkeit der Widerlager ab; dieselbe betrage in den Richtungen der Sehnen $\Delta s_1'$ und $\Delta s_2'$. Die Längenänderungen Δs_1 und Δs_2 können durch Ermittlung der Biegungslinien in Bezug auf zu den Sehnen senkrecht gelegte Geraden nach der allgemeinen Gleichung der Biegungslinie gefunden werden. (Fig. 45.)

$$-\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\Delta d\varphi}{dx} + \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx},$$

φ ist hierbei der Winkel, den die Tangente in einem Bogenpunkte P mit der Sehnennormale PN einschließt. Es lassen sich demnach die Linien für die Werte $q_1 = \frac{\Delta d\varphi}{dx}$ und

$$q_2 = \frac{d\left(\frac{\Delta ds}{ds}\operatorname{tg}\varphi\right)}{dx}$$

genau wie im Abs. 67 und daraus die Biegungslinien $B_1 B_2$ für das Bogenstück BS und $B_1 B_3$ für das Bogenstück BK_1 bestimmen. K_1 ist der linksseitige Kämpferpunkt, S das Scheitelgelenk und B der Berührungspunkt der zur Sehne parallelen Tangente an den Bogen, in welchem Punkte der Bogenteil $K_1 S$ festgehalten (eingespannt) gedacht ist. Die Verkürzung der Sehne $K_1 S = s_1$ ist daher $\Delta s_1 = B_2 B_3$.

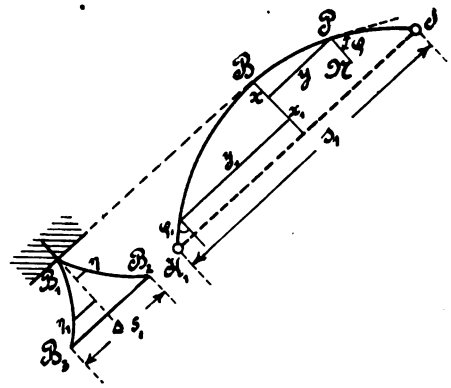


Fig. 45.

In derselben Weise kann man die Verkürzung der Bogensehne $K_2 S$ mit Δs_2 bestimmen.

Trägt man von S (Fig. 46) auf den Sehnen SK_1 und SK_2 die Größen $SC = \Delta s_1 + \Delta s_1'$ und $SD = \Delta s_2 + \Delta s_2'$ auf und errichtet in C und D Senkrechte, so ist S' die gesenkte Lage des Scheitelgelenks, woraus sich die Durchbiegung des Bogens im Gelenk als lotrechter Abstand

$$\delta = S_1 S' \text{ ergibt.}$$

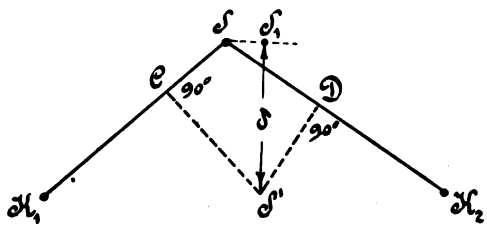


Fig. 46.

Die Biegungslinie.

Die graphische Ermittlung der Biegungslinie erfolgt wie beim Bogen ohne Zwischengelenk, wenn man in diesem, da sich der Winkel zweier Nachbarquerschnitte um einen kleinen, aber endlichen Wert ändert, noch eine Einzellast anbringt, deren Größe $\Delta\varphi$ die Änderung des Winkels ist, welchen die Tangenten im Gelenk einschließen.

$\Delta\varphi$ kann aus folgender Überlegung gefunden werden:

Würde sich der Bogen so deformieren, daß der Tangentenwinkel im Scheitel sich nicht ändert, dann müßte sich seine Spannweite l um Δl ändern. Δl kann man aus der Biegungslinie des Bogens $K_1 S K_2$ in Bezug auf eine zur Verbindungslinie $K_1 K_2$ senkrecht gelegte Gerade nach dem Verfahren für die Längenänderung der Sehne bestimmen.

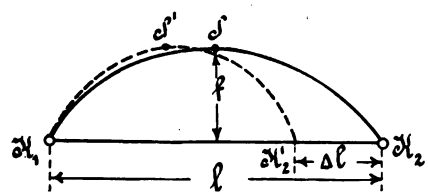


Fig. 47.

Ist die wirkliche Änderung der Spannweite infolge Nachgebens der Widerlager $\Delta' l$, dann muß (Fig. 47)

$$f \cdot \Delta\varphi = \Delta l + \Delta' l \text{ und daher}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l + \Delta' l}{f}.$$

Aus der kontinuierlichen Belastung $q = q_1 + q_2$ und der Einzellast $\Delta\varphi$ im Scheitel ist für den Balken $K_1 K_2$ die Momentenlinie zu zeichnen, deren Ordinaten die Durchbiegungen sind, wenn die Polentfernung $E = 1$ angenommen wurde.

Anmerkung. Da bei Gewölben hauptsächlich Druckbeanspruchungen auftreten und die Betondruckkurven von geraden Linien nicht stark abweichen (s. T.-Fig. 1), so wird für annäherungsweise Berechnungen der Praxis die Einführung eines konstanten Elastizitätsmaßes zu-

lässig sein. Man wird dann ein solches Gewölbe wie einen konstant elastischen Bogen nach den üblichen Methoden berechnen können, ohne von den tatsächlichen Verhältnissen sich weit zu entfernen. (Versuche des Gewölbe-Ausschusses des österr. Ing.- u. Arch.-Vereins in Wien.)

c) Näherungsberechnung exzentrisch gedrückter Eisenbetonstäbe.

69. Druckspannungen im Querschnitt.

Unter der Annahme proportionaler Spannungsverteilung lassen sich die Spannungen in einem durch Biegungsmomente und Normalkräfte beanspruchten Eisenbetonstabe nach der bekannten Formel

$$\sigma_b = \frac{N}{f} \pm \frac{M}{W}$$

bestimmen. Hierin ist $f = f_b \left(1 + \alpha \frac{f_e}{f_b}\right)$, unter f_b und f_e die Querschnitte des Betons und Eisens, unter $\alpha = \frac{E_e}{E_b}$ verstanden. W bedeutet das Widerstandsmoment des an der Stelle der Eiseneinlagen um αf_e vergrößerten Betonquerschnitts.

Wenn $\frac{M}{W} > \frac{N}{f}$, treten Zugspannungen im Beton auf. Dies ist dann der Fall, wenn N außerhalb des Kernes angreift. Für den rechteckigen Querschnitt mit den Abmessungen H und b mit symetrisch liegender Armierung von je f_e, deren gegenseitiger Schwerpunktsabstand h' ist, wird angenähert

$$W = \frac{b \cdot H^2}{6} + \alpha f_e \cdot h' = bH\left(\frac{H}{6} + \frac{\alpha f_e}{b \cdot H} h'\right) = f_b \left(\frac{H}{6} + \alpha h' \frac{f_e}{f_b}\right).$$

Da $M = N \cdot e$, wenn e der Abstand des Angriffspunktes der Normalkraft vom Schwerpunkt des Querschnitts bedeutet, so ist

$$\sigma_b = \frac{N}{f_b} \left(\frac{1}{1 + \alpha \frac{2 f_e}{f_b}} \pm \frac{e}{\frac{H}{6} + \alpha h' \frac{f_e}{f_b}} \right).$$

Mit $\sigma_b = 0$ erhält man die Kernweite

$$e_k = \frac{\frac{H}{6} + \alpha h' \frac{f_e}{f_b}}{1 + \alpha \frac{2 f_e}{f_b}}.$$

Bei einseitiger Armierung ist die dem armierten Querschnittsteil entgegenliegende Kernweite

$$e_k = \frac{h}{6},$$

wenn h die Entfernung der Eiseneinlagen vom entfernteren Querschnittsrande und e_k auf die Mitte dieses Abstandes bezogen wird. Es ist demnach Übereinstimmung mit dem nichtarmierten Querschnitt von der Höhe h vorhanden.

70. Druck- und Zugspannungen im Querschnitt.

In dem Falle daß $e > e_k$ und die auftretenden Zugspannungen des Betons nicht berücksichtigt werden, ergeben sich für die Spannungen und die Lage der Nullinien $v = \frac{h}{e_1}$ in einem beiderseits armierten Querschnitt von der Breite b und den mit σ_e und σ_{e1} beanspruchten Eiseneinlagen f_e und f_{e1}, deren Abstände von der mit σ_b gepreßten Kante h bezw. ah sind, die folgenden Beziehungen (vgl. Abs. 49. Gl. 22 u. f.):

$$\sigma_e = \alpha \cdot (v - 1) \cdot \sigma_b \tag{1.}$$

$$\sigma_{e1} = \alpha \cdot (1 - av) \cdot \sigma_b \tag{1$_1$.}$$

$$k_d = \frac{\sigma_b}{2v} + \frac{f_{e1}}{f_b} \cdot \sigma_{e1} - \frac{f_e}{f_b} \cdot \sigma_e \tag{2.}$$

$$k_b = \frac{3v - 2}{2v^2} \cdot \sigma_b + 3 \cdot \left[(1 - 2a) \frac{f_{e1}}{f_b} \cdot \sigma_{e1} + \frac{f_e}{f_b} \cdot \sigma_e \right]. \tag{3.}$$

k_d ist die Druckspannung des Querschnitts, also $k_d = \frac{N}{bh} = \frac{N}{f_b}$, k_b die ideelle Biegungsspannung, demnach $k_b = \frac{M}{\frac{1}{6} b h^2}$. M wie in Abs. 69.

Denkt man sich die Druckarmierung f_{e1} sehr nahe dem Druckrande, so daß zur Vereinfachung $a = 0$ gesetzt werden kann, dann nehmen die Gleichungen (1$_1$.), (2.) und (3.) mit $\frac{f_e}{f_b} = \mu$ und $\frac{f_{e1}}{f_b} = \mu_1$ die Form an:

$$\sigma_{e1} = \alpha \cdot \sigma_b \tag{4.}$$

$$k_d = \frac{\sigma_b}{2v} + \mu_1 \cdot \sigma_{e1} - \mu \cdot \sigma_e \tag{5.}$$

$$k_b = \frac{3v - 2}{2v^2} \cdot \sigma_b + 3\,\mu_1 \cdot \sigma_{e1} + 3\,\mu \cdot \sigma_e. \tag{6.}$$

Nach Multiplikation der Gleichung (5.) mit 3 und Addition, bezw. Subtraktion mit Gleichung (6.) erhält man:

$$3\,k_d + k_b = \sigma_b \cdot \left(\frac{3v - 1}{v^2} + 6\,\alpha \cdot \mu_1 \right) \tag{7.}$$

$$3\,k_d - k_b = \sigma_b \cdot \left(\frac{1}{v^2} - 6\,\alpha\mu\,(v - 1) \right). \tag{8.}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ist ersichtlich, daß für μ_1 und μ nur dann positive Werte erscheinen, wenn

$$\frac{3\,k_d + k_b}{\sigma_b} > \frac{3\,v - 1}{v^2} \quad (9.) \quad \text{und} \quad \frac{3\,k_d - k_b}{\sigma_b} < \frac{1}{v^2}. \quad (10.)$$

1. Beispiel: In einem Gewölbequerschnitt von $h = 12$ und $b = 100$ cm wirkt mit einer Exzentrizität von $e = 8$ cm eine Normalkraft $N = 12000$ kg. Welche Armierungen sind bei einer größten Betonpressung $\sigma_b = 40$ kg/cm² erforderlich?

$$k_d = \frac{N}{f_b} = \frac{12000}{12 \cdot 100} = 10 \text{ kg/cm}^2$$

$$k_b = \frac{M}{W} = \frac{12000 \cdot 8}{\frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 12^2} = 40 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Randspannungen in einem homogenen Querschnitt betrügen -50 und $+30$ kg/cm². Nimmt man demgemäß $v = \frac{8}{5}$ an, so ergeben sich aus den Gleichungen (7.) und (8.) mit $\alpha = 15$ die Armierungen 0,29 % in der Druck- und 1,18 % in der Zugzone.

Wird $v = 2$ gewählt, so sind die Armierungen im Druck- und Zugteil je 0,55 %. Ist $v = \frac{8}{3}$, wobei $\sigma_e = 1000$, so müssen die Eiseneinlagen 1,58 und 0,26 % betragen. Demnach ist unter diesen 3 Annahmen die Zug- und Druckarmierung von je 0,55 % die vorteilhafteste. Die Eisenspannungen betragen hierbei nach Formel (1) und (1_1) $\sigma_e = \sigma_{e1} = 600$ kg/cm².

Werden die Bedingungen (9.) und (10.) nicht erfüllt, dann ist keine Druck-, bezw. keine Zugarmierung erforderlich.

Wenn nur die Zugseite armiert werden muß (Bedingung (10.) erfüllt), fällt Gleichung (1_1.) weg und die Gleichungen (2.) und (3.) haben die Form:

$$k_d = \frac{\sigma_b}{2\,v} - \frac{f_e}{f_b} \cdot \sigma_e \quad (11.)$$

$$k_b = \frac{3\,v - 1}{v^2} \cdot \sigma_b - 3\,k_d. \quad (12.)$$

2. Beispiel: $k_d = 10$, $k_b = 40$, $\sigma_b = 40$ kg/cm² (s. Beispiel 1.). Aus Gleichung (12) ist $v = 1{,}26$, aus (1.) $\sigma_e = 156$ kg/cm², aus (11.) ist $\frac{f_e}{f_b} = 0{,}0378$, d. h. die Zugarmierung müßte 3,78 % Stärke erhalten.

Die Grundformeln (1.), (1_1.), (2.) und (3.) gelten auch für beiderseits armierte Balken, wenn $k_d = 0$ gesetzt wird.

Die zweckmäßigsten Materialbeanspruchungen werden erreicht, wenn aus Gleichung (1.)

$$v - 1 = \frac{\sigma_e}{\alpha \cdot \sigma_b},$$

worin σ_e und σ_b die zulässigen Spannungen bedeuten. Für $\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = 25$ und $\alpha = 15$ gesetzt, ergibt $v = \frac{8}{3}$.

Nimmt man $a = \frac{1}{8}$ an und setzt $\frac{f_{e1}}{f_b} = \mu_1$, $\frac{f_e}{f_b} = \mu$, so wird

$$\sigma_{e1} = 10 \cdot \sigma_b \qquad (13.)$$

$$\mu = \frac{3}{400} + 0{,}4\ \mu_1 \qquad (14.)$$

$$\frac{k}{\sigma_b} = \frac{63}{64} + 52{,}5\ \mu_1 \text{ (vergl. Formel 20, Abs. 49.).} \qquad (15.)$$

III. Abschnitt.

Spannungen in armierten Druckstäben.

a) Reiner Druck.

71. Verteilung der Spannungen auf Beton und Eisen.

Die Spannung σ_b in einem durch die Druckkraft P beanspruchten Betonstabe vom Querschnitt f sind

$$\sigma_b = \frac{P}{f}.$$

Ist der Querschnitt durch eine Eiseneinlage armiert, so ist die ideelle Spannung im Verbundquerschnitt

$$k = \frac{P}{f}.$$

Hiervon entfällt ein Teil auf den Beton, der andere auf das Eisen. Da die Verkürzungen bei beiden als gleich angenommen werden, so erhält das Eisen in demselben Maße höhere Spannungen, als dessen Elastizitätsmaß kleiner als jenes des Betons ist.

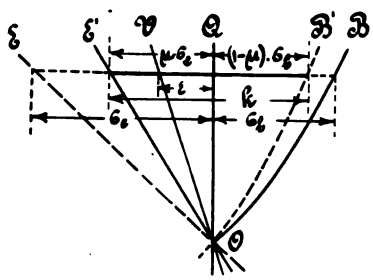


Fig. 48.

Wir betrachten einen Querschnitt, der sich aus dem Betonquerschnitt f_b und dem Eisenquerschnitt f_e zusammensetzt. Die Gesamtfläche sei f, das Verhältnis des Eisens zum Gesamtquerschnitt ist

$$\mu = \frac{f_e}{f}.$$

Tragen wir die Beton- und Eisenverkürzungslinien in der üblichen Weise auf (Fig. 48), indem wir die Eisenspannungslinie für μ und die Betonkurve für $(1 - \mu)$ einzeichnen, so ist ersichtlich, daß aus den Linien OE' für $\mu \cdot \sigma_e$ und OB' für $(1 - \mu) \cdot \sigma_b$ unmittelbar der Zusammenhang der vom Eisen und Beton übertragenen Kräfte entnommen werden kann.

Ist k die ideelle Druckspannung, deren Größe zwischen den Linien OB' und OE' eingetragen ist, so sind die Strecken QB' und QE' den Beton- und Eisendruckkräften proportional. Es ist dann $QB = \sigma_b$ der Spannung des Betons auf die Quadrateinheit und $QE = \sigma_e$ der Eisenspannung. Die Summe der Beton- und Eisenspannungen ist

$$\begin{aligned} f_b \cdot \sigma_b + f_e \cdot \sigma_e &= (1 - \mu) f \cdot \frac{\overline{QB'}}{1 - \mu} + \mu f \frac{\overline{QE'}}{\mu} \\ &= f \cdot \overline{QB'} + f \overline{QE'} \\ &= f \cdot (\overline{QB'} + \overline{QE'}) \\ &= f \cdot k = P. \end{aligned}$$

Ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, kann für Untersuchungen statt OB' die Kurve OB benutzt werden (vergl. Abs. 25).

Darnach lassen sich die Spannungen bei gegebenem Querschnitt und bekannter Belastung bestimmen.

Die Zusammendrückung λ eines armierten Stabes von der Länge l ergibt sich aus der Gleichung

$$\lambda = \varepsilon \cdot l,$$

ε ist aus der Verdrehungslinie OV oder aus dem Abstand vom Nullpunkt der Spannungslinie zu erhalten (s. Fig. 48).

Die Dimensionierung eines Druckstabes mit angenommenem Eisenquerschnittsverhältnis μ erfolgt nach Einzeichnen der bezüglichen Spannungslinien aus der Gleichung

$$f = \frac{P}{k},$$

k ist aus der Zeichnung abzugreifen, wenn die zulässigen Spannungen von Beton und Eisen gegeben sind.

72. Die Berechnung eines Druckquerschnittes.

Die Querschnittsfläche kann unter Zugrundelegung eines bestimmten Elastizitätsmaßes für den Beton aus der Beziehung ermittelt werden

$$\begin{aligned} P &= f_b \cdot \sigma_b + f_e \cdot \sigma_e \\ &= (1 - \mu) f \cdot \sigma_b + \mu \cdot f \sigma_b \cdot \frac{\alpha_b}{\alpha_e} \cdot \end{aligned}$$

Hierin bedeutet α_b das durchschnittliche Elastizitätsmaß aus der Beziehung $\alpha_b = \frac{\varepsilon}{\sigma_b}$ (zu unterscheiden vom wirklichen Elastizitäts-

maß bei der Spannung σ_b; dieses ist $\alpha' = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}$, s. Abs. 2).

Setzen wir $\frac{\alpha_b}{\alpha_e} = \alpha$, so ist

$$P = f \cdot \sigma_b [1 + \mu \cdot (\alpha - 1)]. \qquad (1.)$$

Beispiel. Welche Druckkraft kann eine kurze Betoneisenstütze vom skizzierten Querschnitt (Fig. 49) aufnehmen, wenn das elastische Verhalten des Betons und Eisens, sowie deren zulässige Druckspannungen bekannt sind.

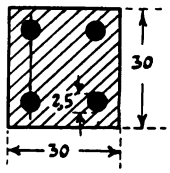


Fig. 49.

Es seien also gegeben:

$$f = 30^2 = 900 \text{ cm}^2$$

$$f_e = 4 \cdot \frac{2{,}5^2 \cdot \pi}{4} = 19{,}64$$

$$\mu = \frac{f_e}{f} = 0{,}0218$$

$\sigma_b = 50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (für guten Beton) und

$$\alpha = \frac{\alpha_b}{\alpha_e} = \frac{\frac{1}{200000}}{\frac{1}{2000000}} = 10$$

(die durchschnittlichen Elastizitätsmaße bei 50 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ Spannung aus der Beziehung $\alpha_b = \frac{\varepsilon}{\sigma_b}$ sind bei der Betonkurve (T.-Fig. 1)

1. $\frac{1}{240000}$, 2. $\frac{1}{200000}$, 3. $\frac{1}{230000}$, 4. $\frac{1}{150000}$, 5. $\frac{1}{200000}$ u. s. w.).

Demnach ist $P = 900 \cdot 50 [1 + 0{,}0218 (10 - 1)] = 53800$ kg.

73. Aufstellung einer Formel für armierte Druckstäbe.

Unter Zugrundelegung der Betonkurve 10 (T.-Fig. 1) erhält man innerhalb der üblichen Beanspruchungen $\left(\text{von } 30 \text{ bis } 50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$ analog den Biegungsformeln in den Abs. 37 u. f. für die ideelle Druckspannung k eines armierten Stabes den Ausdruck:

$$k = \sigma_d + \mu \cdot [3{,}2 - 0{,}08 (50 - \sigma_d)] \qquad (2.)$$

daraus

$$\sigma_d = \frac{k + 0{,}8 \cdot \mu}{1 + 0{,}08 \cdot \mu} \qquad (3.)$$

Hierin bedeuten σ_d die Betonpressung und μ den Prozentgehalt des Querschnitts an Eisen.

Aus Formel (1.) ist für eine Betonpressung:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_d &= 50, \; k = 50 + 3{,}2 \cdot \mu \\ \sigma_d &= 40, \; k = 40 + 2{,}4 \cdot \mu \\ \sigma_d &= 30, \; k = 30 + 1{,}6 \cdot \mu \end{aligned}\right\} \qquad (2'.)$$

Für die Eisenspannung ergibt sich die Beziehung:

$$\sigma_e = 8\,(\sigma_d - 10) \qquad (4.)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } \sigma_d = 50 & \text{wird } \sigma_e = 320\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \\ \text{„ } \sigma_d = 40 & \text{„ } \sigma_e = 240 \text{ „} \\ \text{„ } \sigma_d = 30 & \text{„ } \sigma_e = 160 \text{ „} \end{array}\right\} \qquad (4'.)$$

Verläuft die Betondruckkurve flacher als die der Ermittelung der Formeln zu Grunde gelegte, dann sind die vorhandenen Betonpressungen geringer, die Eisenspannungen hingegen höher als die Ergebnisse der Formeln. Bei Betonkurve 4 (T.-Fig. 1) ist für 40 bis 50 $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ Spannung

$$\alpha = \frac{\alpha_b}{\alpha_e} = 13.$$

Die Eisenspannungen werden dann annäherungsweise

$$\sigma_e = 13 \cdot \sigma_b.$$

Für $\sigma_b = 50$ ist $\sigma_e = 650\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Höhere Eisenspannungen als etwa 650 sind demnach nicht zu erwarten, sofern σ_b höchstens 50 ist. Das Maßgebende sind also wieder die Druckspannungen des Betons.

Beispiele.

1. Wie groß sind die Spannungen in einer kurzen Betoneisensäule von kreisförmigem Querschnitt $D = 30$ cm mit 8 Rundeisenstäben $d = 1{,}8$ cm, wenn die Belastung 35 t beträgt.

$$f = 706{,}9 \text{ cm}^2$$

$$f_e = 8 \cdot \frac{1{,}8^2 \cdot \pi}{4} = 20{,}3 \text{ cm}^2$$

$$\mu = \frac{f_e}{f} = 0{,}0287 \text{ oder } = 2{,}87\,\%$$

$$k = \frac{P}{f} = \frac{35000}{706{,}9} = 49{,}5\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Nach Formel (2.) mit $\mu = 2{,}87$ und $k = 49{,}5$ ist

$$\sigma_d = \frac{49{,}5 + 0{,}8 \cdot 2{,}87}{1 + 0{,}08 \cdot 2{,}87} = 42{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Nach Formel (3.) ist

$$\sigma_e = 8\,(42{,}2 - 10) = 258\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

2. Eine Betoneisensäule quadratischen Querschnitts soll eine Last von 56000 kg übertragen. Welche Abmessungen sind erforderlich, wenn

die Betondrücke 35 $\frac{kg}{cm^2}$ nicht überschreiten sollen und die Armierungsstärke etwa 3 % beträgt.

Nach Formel (1.) ist

$$k = 35 + 3 \cdot [3{,}2 - 0{,}08\,(50 - 35)] = 41\ \frac{kg}{cm^2}.$$

Der erforderliche Querschnitt ist

$$f = \frac{56000}{41} = 1366\ cm^2,$$

daraus die Quadratseite

$$a = \sqrt{1366} = 37\ cm.$$

Der Eisenquerschnitt ist $f_e = 0{,}03 \cdot 1366 = 40{,}98\ cm^2$. Legen wir an jede Seite 3 Rundeisen, zusammen also 8, so ergibt sich die Stärke derselben mit $d = 2{,}6$ cm.

Die Eisenspannung beträgt nach Formel (3)

$$\sigma_e = 8\,(35 - 10) = 200\ \frac{kg}{cm^2}.$$

Setzt man in Formel (1.) $\frac{P}{f} = k$, und α statt $\alpha - 1$, so heißt die Annäherungsformel $k = \sigma_b \cdot (1 + \alpha\mu)$ (5.) (s. VI. Abschn., Tab. c.)

b) Knickung.

74. Allgemeine Erörterung.

Die Eulersche Knickformel für lange Stäbe bestimmt die Last, welche eine Strebe von unveränderlichem Querschnitt und Elastizitätsmaß zum Ausbiegen (Knicken) und daher zum Bruch bringt mit

$$P = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{J}{\alpha_i},$$

worin l die Knicklänge bedeutet. Solange diese Last nicht erreicht ist, wird eine Biegung nicht anzunehmen sein. Die Spannungen verteilen sich daher gleichmäßig über den Querschnitt wie bei reiner Druckbeanspruchung. Daraus folgt, daß auch bei einer Betoneisenstütze J und α_i für alle Querschnitte gleich bleiben, sofern nur Beton und Eisen prismatisch angeordnet sind. Da sonach die Voraussetzungen der Eulerschen Formel erfüllt sind, ist deren Anwendung auf armierte Säulen zulässig.

Das Elastizitätsmaß α_b des Betons ist abhängig von der Spannung. Es wird daher unmöglich sein, eine allgemein gültige Formel aufzustellen wie etwa für das Eisen. Es erscheint vielmehr notwendig, eine bestimmte Spannung ins Auge zu fassen, der bei gegebener Armierung ein leicht

zu ermittelndes ideelles Elastizitätsmaß α_i entspricht. Denkt man sich die gefundene Elastizitätsziffer für alle Beanspruchungen gültig, so ist die zulässige Knicklast

$$P = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{J}{\alpha_i},$$

wobei n der Sicherheitsgrad ist. Diese Knicklast gibt nur dann den theoretisch richtigen Wert an, wenn durch dieselbe Druckspannungen erzeugt werden, unter denen das Elastizitätsmaß α_i entsteht. Es ist aber

$$\alpha_i = \frac{d\varepsilon}{dk} \text{ (Fig. 48),}$$

worin ε die der ideellen Druckspannung k entsprechende spezifische Verkürzung bedeutet. Da die Betondruckkurve von der Geraden nicht sehr abweicht, so ist angenähert

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Denkt man sich die Spannung k über dem Querschnitt gleichmäßig verteilt — wie bei homogenem Material mit der Elastizität α_i —, so entspricht diesem das einfache Trägheitsmoment der Gesamtfläche. Nach dieser Auffassung wäre die Lage der Eisenstäbe gleichgültig.

75. Berechnung der Knicklast, bezw. des Trägheitsmoments. Aus der obigen Gleichung ist

$$J = n \cdot \alpha_i \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot P.$$

Hierin ist $\alpha_i = \frac{\varepsilon}{k}$; $\varepsilon = \alpha_b \cdot \sigma_b = \alpha_e \cdot \sigma_e$.

α_b ist das durchschnittliche Elastizitätsmaß des Betons bei der Pressung σ_b. Nach Abs. 72 ist

$$k = (1 - \mu) \cdot \sigma_b + \mu \cdot \sigma_e = \sigma_b [1 + \mu (\alpha - 1)],$$

daher ist $\alpha_i = \frac{\alpha_b}{1 + \mu (\alpha - 1)}$, somit

$$J = \frac{n}{\pi^2} \frac{\alpha_b}{1 + \mu \cdot (\alpha - 1)} \cdot P \cdot l^2 \qquad (1.)$$

Nimmt man den Sicherheitsgrad $n = 10$ und wäre $\alpha_b = \frac{1}{200\,000}$, also $\alpha = 10$, so beträgt

$$J = \frac{0{,}000\,005}{1 + 9\,\mu} \cdot Pl^2$$

für P in kg und l in cm, oder

$$J = \frac{50}{1 + 9\,\mu} \cdot Pl^2 \qquad (2.)$$

für P in t und l in m.

$$\left.\begin{array}{rrrr} \text{Für} & \mu = 0{,}01 & \text{ist} & J = 46\,Pl^2 \\ \text{„} & \mu = 0{,}02 & \text{„} & J = 42\,Pl^2 \\ \text{„} & \mu = 0{,}03 & \text{„} & J = 39\,Pl^2 \\ \text{„} & \mu = 0{,}04 & \text{„} & J = 37\,Pl^2 \\ \text{„} & \mu = 0{,}06 & \text{„} & J = 33\,Pl^2 \end{array}\right\} \qquad (2.)$$

Bei der folgenden Betrachtung ist es möglich, die Lage des Eisens zu berücksichtigen.

Das Trägheitsmoment des Querschnitts setzt sich aus dem des Betons und des Eisens zusammen. Hätte das Eisen dieselbe Widerstandsfähigkeit wie der Beton, dann wäre das Trägheitsmoment des Gesamtquerschnittes $J = J_b + J_e$, d. h. die Summe des Trägheitsmomentes der Betonfläche und des Trägheitsmomentes der Eisenfläche. Nun ist aber die Druckfähigkeit des Eisens $\alpha = \frac{\alpha_b}{\alpha_e}$ mal größer als die des Betons; daher bleibt die Kapazität des Querschnittes dieselbe, wenn an Stelle des Eisens die αfache Betonfläche eingelegt würde. Es ist demnach das Trägheitsmoment der um das $(\alpha - 1)$fache des Eisenquerschnitts vergrößerten Gesamtfläche f

$$J = J_f + (\alpha - 1)\, J_e,$$

J_f und J_e sind auf die gemeinsame Schwerachse zu beziehen. Die Knickformel lautet dann:

$$J_f + (\alpha - 1) \cdot J_e = n \cdot \alpha_b \frac{l^2}{\pi^2} \cdot P \qquad (3.)$$

Kennt man die Druckkurven der Verbundstoffe, so erhält man mit der ideellen Druckspannung $k = \frac{P}{f}$ die Beanspruchung des Betons σ_b und des Eisens σ_e und diesen entsprechend das Verhältnis α.

α hängt somit indirekt von der gewählten Querschnittsfläche oder der Last ab. Der Sicherheitsgrad n ist insofern eine schwierig zu wählende Zahl, weil sie nur eine ideelle Bedeutung hat; denn sie drückte die vorhandene Sicherheit nur dann theoretisch richtig aus, wenn die Elastizitätsziffern bis zum Bruch konstant blieben, während sie tatsächlich nur für die betrachtete Belastung gelten.

Setzen wir wieder wie in Formel (3) $n = 10$ und $\alpha = 10$, so wird

$$J_f + 9\, J_e = 50\, Pl^2 \qquad (4.)$$

76. Vergleich der beiden Berechnungen und Beispiele.

Nach Einsetzung von

$$\gamma = \frac{\pi^2}{n \cdot \alpha_b} \text{ ist aus (1.)}$$

$$P_1 = \frac{J[1 + \mu(\alpha - 1)]}{\gamma l^2} \text{ und aus (3.)}$$

$$P_2 = \frac{J \cdot [1 + \frac{J_e}{J}(\alpha - 1)]}{\gamma l^2} \cdot$$

Setzen wir für $\frac{J_e}{J} = \mu'$, so haben die Gleichungen genau dieselbe Form. Es ist $P_1 = P_2$, wenn $\mu = \mu' = \frac{J_e}{J}$ (5.)

μ bedeutet den Anteil der Eisenfläche, μ' den Anteil des Eisenträgheitsmomentes an dem bezüglichen Ganzen. Die Knickformeln stimmen also für gewisse Armierungsverhältnisse überein. μ' wird um so größer, je weiter die Eisenflächen von der Schwerachse entfernt liegen, gleichzeitig wächst die Tragfähigkeit. Liegt die Armierung in der Schwerachse, so ist der Schutz, den sie gegen Knicken gewährt, nach Formel 3 fast verschwindend.

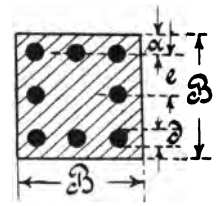


Fig. 50.

1. Beispiel. Für den skizzierten Querschnitt (Fig. 50) ist

$$\mu = \frac{m \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{B^2},$$

$$m = 8,\ d = 2{,}5,\ B = 30 \text{ cm}.$$

Daher $\mu = 0{,}0436$, ferner

$$J_e = 8\frac{\pi d^4}{64} + 6\frac{\pi d^2}{4} \cdot e^2 = 15 + 29{,}45 e^2.$$

Soll $\frac{J_e}{J} = \mu' = \mu$, so muß

$$15 + 29{,}45\, e^2 = 0{,}0436 \cdot J.$$

Daraus $e^2 = \frac{0{,}0436 \cdot J - 15}{29{,}45}$, für J den Wert eingesetzt, gibt

$e \doteq 10$ cm, d. h. wenn die Armierung in dem betrachteten Querschnitt 5 cm vom Rande liegt, geben beide Formeln dieselben Resultate.

2. Beispiel. Für die Belastung von 18 t ist eine Säule von 5 m Länge zu berechnen. Die größte Pressung im Beton soll höchstens $30 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, der Eisengehalt etwa 2,5 % betragen.

a) Berechnung auf Druck:

Nach Druckformel (2'.) ist $k = 30 + 1{,}6\,\mu = 33{,}6\ \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$ (für $\mu = 2{,}5$).

Daher $f = \frac{18000}{33{,}6} = 536\ \text{cm}^2$.

Für quadratischen Querschnitt ist $a = \sqrt{536} = \mathbf{24\ cm}$.

$$f_e = 0{,}025 \cdot 24^2 = 14{,}4\ \text{cm}^2.$$

Gewählt werden 4 Rundeisen mit $d = 2{,}2$ cm Durchmesser.

b) Berechnung auf Knickung ($\mu = 0{,}025$).

Nach Knickformel (2.) $J = \frac{50}{1 + 9 \cdot 0{,}025} \cdot 18 \cdot 5^2 = 18360\ \text{cm}^4$.

Aus $\frac{1}{12} a^4 = 18360$ ist $a = 21{,}7$ cm.

Nach der Beziehung (5.) soll $\frac{J_e}{J} \gtreqless \mu$,

also $$J_e \gtreqless \mu \cdot J.$$

Mit Vernachlässigung des Trägheitsmoments der Eisenquerschnitte bezüglich ihrer eigenen Achse ist $J_e = 4 \cdot \frac{2{,}2^2 \cdot \pi}{4} \cdot e^2$, $J = \frac{1}{12} 24^4$, demnach

$$4 \cdot \frac{2{,}2^2 \cdot \pi}{4} \cdot e^2 = 0{,}025 \cdot \frac{1}{12} 24^4,$$

$$e^2 = \frac{0{,}025 \cdot 27650}{15{,}2} = 45,$$

$$e = 6{,}8\ \text{cm},$$

d. h. die Eiseneinlagen sollen eine Entfernung von wenigstens 6,8 cm von der Schwerachse des Querschnitts haben, dessen Seite $a = 24$ cm betragen muß.

3. Beispiel. Welche Tragfähigkeit hat eine 6 m hohe Säule, mit kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser $D = 35$ cm, welcher in der Nähe des Randes mit 10 25 mm dicken Rundeisen armiert ist. Der Beton kann auf $45\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ beansprucht werden.

a) $$f = \frac{35^2 \cdot \pi}{4} = 962\ \text{cm}^2$$

$$f_e = 10 \cdot \frac{2{,}5^2 \cdot \pi}{4} = 49{,}1\ \text{cm}^2$$

$$\mu = \frac{f_e}{f} = 0{,}051 \text{ oder } = 5{,}1\ \%.$$

Nach Druckformel (2.) ist $k = 59{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$.

Die Tragfähigkeit auf Druck beträgt daher

$$P = 59{,}3 \cdot 962 = 57\,000 \text{ kg}.$$

b) Nach Knickformel (2) ist

$$J = \frac{50}{1 + 9 \cdot 0{,}051} \cdot P \cdot 6^2 = \frac{\pi \cdot 35^4}{64}.$$

Hieraus $P = 59{,}6$ t.

Die Tragfähigkeit ist demnach 57 000 kg.

IV. Abschnitt.

Spannungen aus Querkräften (Schubspannungen).

Wenn auf einen Stab Querkräfte einwirken, so ändern sich im allgemeinen die Biegungsmomente in benachbarten Querschnitten nach der Beziehung:

$$\frac{dM}{dx} = Q.$$

Aus der Variation der Momente resultiert ein Unterschied der Spannungen, welcher das Material in der Richtung derselben auf Abscherung oder Schub beansprucht. Je größer die Differenzen der Momente, d. h. je größer Q ist, desto bedeutender sind die Schubspannungen. Sie verschwinden, wenn die Momente konstant sind, also wenn $Q = O$.

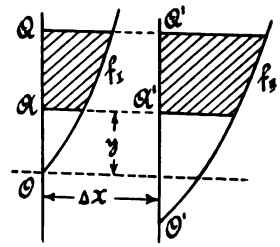


Fig. 51.

77. Ermittelung der Schubspannungen. Wir betrachten zwei benachbarte Querschnitte, deren Abstand Δx ist (Fig. 51). Die aus den äußeren Momenten entstehenden Spannungsflächen oberhalb der Faser y auf 1 cm Breite seien f_I und f_{II}. Die Differenz derselben ist

$$\Delta S = f_I - f_{II} = \Delta f.$$

Die horizontale Faserschicht AA_1 von der Länge Δx im Abstande y erleidet daher durch ΔS eine Beanspruchung auf Abscherung.

Dieselbe ist im allgemeinen um so größer, je näher die Faser-

schichte der Nullinie liegt. Die Größe der abscherenden Kraft auf die Länge 1 ist

$$\sigma_s = \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Denken wir uns die Entfernung Δx unendlich klein, so ist

$$\sigma_s = \frac{df}{dx}$$

die Schubspannung auf die Flächeneinheit.

Die Spannungsflächen f ergeben sich aus den bei der Spannungsermittelung gefundenen Flächen f durch die Beziehung

$$f = m\bar{f}, \text{ worin } m = \frac{H}{\mathfrak{H}}.$$

Tragen wir daher die Spannungsflächen für eine bestimmte Faserschichte, in welcher die Schubspannungen ermittelt werden sollen, von einer Geraden als Ordinaten auf, so erhalten wir im allgemeinen eine krumme Linie, deren trigonometrische Tangenten der Neigungswinkel die Schubspannungen darstellen (Fig. 52). — (Vergl. Abs. 67). Es ist

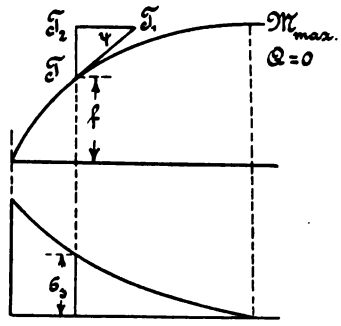


Fig. 52.

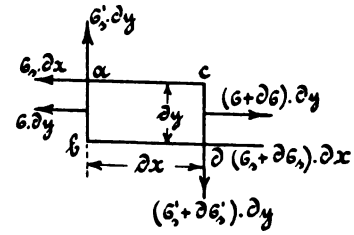


Fig. 53.

$$tg\psi = \frac{TT_2}{T_1T_2} = \frac{df}{dx}.$$

Wird $T_1T_2 = 1$ gemacht, so ist $TT_2 = \sigma_s$.

78. Lotrechte Schubspannungen.

Wir untersuchen einen durch horizontale und vertikale Flächen aus dem Balken herausgeschnittenen Teil *abcd* von der Breite 1 (Fig. 53). Es wirken auf denselben außer den früher behandelten Normalspannungen σ und Horizontalschubkräften σ_s noch lotrechte Schubkräfte σ_s', deren Größe aus der Momentengleichung für irgend einen Punkt d gewonnen werden kann:

$$-\sigma_s dx \cdot dy + \sigma_s' dy \cdot dx - \sigma dy \cdot \frac{dy}{2} + (\sigma + d\sigma)\, dy \cdot \frac{dy}{2} = 0.$$

Die letzten beiden Glieder unterscheiden sich durch kleine Größen 3. Ordnung. Ihre Differenz kann gegen die übrigen Größen 2. Ordnung vernachlässigt werden; daher ist $\sigma_s = \sigma_s'$, d. h. die lotrechten Schubspannungen sind in jedem Punkte des Stabes den wagrechten gleich.

79. Armierung gegen Schub.

Die Schubfestigkeit des Betons wurde für die Mischung 1:3 mit 30 bis 36, für 1:4 mit 28 bis 31, für 1:7 mit 19 bis 26 $\frac{kg}{cm^2}$ gefunden (Wayß & Freytag). Die zulässigen Schubspannungen können darnach mit 4 bis 6 $\frac{kg}{cm^2}$ angenommen werden. (siehe Vorschriften, VI. Abschn.)

Überschreiten die im Abs. 77 ermittelten Schubspannungen die zulässigen, dann sind vertikale Eisenbügel oder Bolzen einzulagern, welche einen Teil der wagrechten Schubkräfte aufnehmen. Das Verhältnis der vom Bügel und Beton aufgenommenen Schubkräfte wird wesentlich von der Scherelastizität beider Stoffe, ferner auch von der Druckelastizität des Betons abhängen, da infolge der Spannungen σ_s eine Verschiebung zweier benachbarter Betonschichten (Fig. 54) und ein Eindrücken des Eisens stattfindet. Weil die Scherelastizität des Betons nicht erforscht

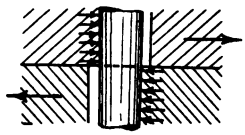


Fig. 54.

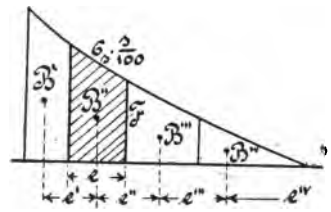


Fig. 55.

ist, kann die Berechnung der Bügel nur unter bestimmten Annahmen erfolgen.

Nimmt man an, daß die Bolzen $s\,\%$ der Schubspannungen aufnehmen, so kann ihre Dimensionierung oder Entfernungsbestimmung aus der auf $\frac{s}{100}$ reduzierten Schubspannungskurve erfolgen (Fig. 55). Ist der Bügelquerschnitt f, die Schubspannung des Eisens k_s, so berechnet sich die aufgenommene Schubkraft mit

$$S = f \cdot k_s = F \cdot B.$$

F ist die Schubspannungsfläche der $\sigma_s \cdot \frac{s}{100}$ auf die Länge e. B ist die Breite des Querschnitts. Aus der Gleichung läßt sich für ein gegebenes f und k_s, F und daraus e bestimmen. Den Werten e entsprechen die Bügelentfernungen e^I, e^{II}, e^{III} u. s. w.

Eine angenäherte Berechnung der Bügel wird unmittelbar aus der Querkraftfläche erfolgen können.

Die lotrechten Schubkräfte werden zum Teil durch die horizontale Armierung getragen.

80. Die Adhäsionsspannung zwischen dem Eisen und Beton.

Dieselbe ergibt sich aus der Differenz der Eisenspannungen ΔS_e in zwei benachbarten Querschnitten nach dem im Abs. 77 gegebenen Verfahren, indem man die Eisenspannungsflächen f_e zu einer Kurve aufträgt. Daraus ist die Adhäsionsspannung

$$\sigma_a = \frac{df_e}{dx} \cdot \frac{B}{n \cdot u}.$$

Hierin ist B die Querschnittsbreite, n die Anzahl der Eisenstäbe, deren Querschnittsumfang u ist.

Die Haftfestigkeit wurde durch zahlreiche Versuche erforscht; sie beträgt je nach der Qualität des Betons 7 bis 49, im Mittel 30 $\frac{kg}{cm^2}$ Eisenoberfläche.

In der Regel erreicht die Adhäsionsspannung in armierten Trägern bei weitem nicht die Haftfestigkeit, so daß dadurch eine gemeinsame Wirkung von Beton und Eisen gewährleistet erscheint.

Beispiel: Schubspannungen in einer Hennebique-Decke (s. Abs. 52-62).

In T.-Fig. 18 sind für die Belastung V (aufgebrachte Last 2000 kg/m^2) die Linien der Spannungsflächen AF_d des Flansches (410 $\times$ 10 cm^2) und der Eisenflächen AF_e aufgetragen und daraus die Schubspannungen BB_1 in FS (T.-Fig. 14) sowie die Adhäsionsspannungen ES (σ_a) nach Abs. 80 bestimmt. Die Schubspannungen σ_s in FS betragen vom Auflager gegen die Mitte in Entfernungen von je $\frac{1}{8}$ Spannweite 15,7, 11,3, 7,8, 3,8 und 0 kg/cm^2. — Die Adhäsionsspannungen σ_a betragen 4,6, 4,0, 3,1, 2,2 und 0 kg/cm^2. Es besteht nach diesem selbst bei der starken Belastung von 2000 kg/m^2 noch keine Gefahr der Lösung des Zusammenhanges von Beton und Eisen.

81. Schubspannungen unter der Annahme proportionaler Druckspannungen im Beton (s. Abs. 47, 48 und 49).

Unter Vernachlässigung der Zugspannungen des Betons werden die maximalen Schubkräfte den Adhäsionskräften gleich. Dieselben betragen

auf die Trägerbreite und Längeneinheit $\mathfrak{h} = \frac{Q}{s}$, wobei unter s die Entfernung der Schwerpunkte der Spannungsflächen und unter Q die Querkraft verstanden ist. Es ist

$$s = h - \frac{e_1}{3} = h\left(1 - \frac{e_1}{3h}\right)$$

(s. Fig. 30). Demnach wird

$$\mathfrak{h} = \frac{Q}{h\left(1 - \frac{e_1}{3h}\right)} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h} : \frac{Q}{h} = \frac{1}{1 - \frac{e_1}{3h}}.$$

Nach Gl. 18, Abs. 49 ist

$$\frac{h}{e_1} = \frac{w+1}{2},$$

demnach ist

$$\frac{1}{1 - \frac{e_1}{3h}} = \frac{3(w+1)}{3w+1}, \quad \text{wobei} \quad w = \sqrt{\frac{200}{\alpha\mu} + 1}.$$

Sonach ist das Verhältnis der horizontalen Schubspannung zum Quotienten $\frac{Q}{h}$ ausgedrückt durch

$$\mathfrak{h} : \frac{Q}{h} = \frac{3(w+1)}{3w+1}.$$

Dieses Verhältnis ist mit der Veränderlichen μ für $\alpha = 15$ (s. Abs. 49) ausgerechnet und in der Tabelle a, VI. Abschnitt, zusammengestellt. Man kann sich leicht überzeugen, daß die Adhäsionsspannungen bei Außerachtlassung der Zugspannungen rechnerisch größer, die Betonschubspannungen aber kleiner ausfallen, als wenn die Betonzugzone berücksichtigt würde. Daher ist es für letztere im Interesse der Sicherheit vorteilhaft wenn die horizontale Schubkraft im Beton

$$\mathfrak{h}_b = \frac{Q}{\frac{2}{3}H} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{H}$$

gesetzt wird.

Beispiel: Es sind die größten Adhäsions- und Betonschubspannungen des Plattenbalkens in Beispiel 3, Abs. 49 zu ermitteln. In der Balkenmitte ist $\mu = 0{,}60\,\%$. An den Trägerenden ist daher $\mu = 0{,}80\,\%$; nach Kol. 5 ist die größte Adhäsionskraft

$$\mathfrak{h} = 1{,}094 \cdot \frac{Q}{h} = 1{,}094 \cdot \frac{20000}{38{,}7} = 566 \text{ kg/cm}.$$

Die Adhäsionsspannung auf das cm² Eisenoberfläche betrüge darnach

$$\sigma_a = \frac{\mathfrak{h}}{6 \cdot u} = \frac{566}{6 \cdot 3{,}6 \cdot \pi} = \underline{8{,}3 \text{ kg/cm}^2.}$$

Da diese die zulässige Adhäsionsspannung überschreitet, sind die Eisenstangen an den Enden umzubiegen.

Die maximale Betonschubspannung ist

$$\sigma_s = \frac{\mathfrak{h}_s}{b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{H \cdot 2b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{20000}{45 \cdot 2 \cdot 30} = 11{,}1 \text{ kg/cm}^2.$$

Da auch diese die zulässige Beanspruchung (4,5 kg/cm²) übersteigt, so sind vertikale Bügel anzuordnen. Nimmt man an, daß diese die gesamte Schubkraft übertragen sollen, so ergibt sich deren Gesamtquerschnitt f_s für eine Balkenhälfte aus der Beziehung:

$$f_s \cdot k_s = \frac{\mathfrak{h}_s \cdot l}{4} = \frac{667 \times 800}{4} = 133000 \text{ kg}.$$

Wenn die Schubbeanspruchung des Eisens $k_s = 600$ kg/cm², so beträgt

$$f_s = \frac{133000}{600} = 222 \text{ cm}^2.$$

Der Querschnitt eines Bügels sei $f = 2 \times 0{,}4 \cdot 6{,}0 = 4{,}8$ cm², ihre Zahl ist demnach für eine Balkenhälfte

$$n = \frac{222}{4{,}8} = 47.$$

Auf jeden der 6 Rundeisenzugstäbe entfallen sonach 8 Bügel, deren Entfernungen von der Mitte

$$x_1 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{8}} = 141, \; x_2 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{2}{8}} = 200, \; x_3 = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3}{8}} = 245.$$

$x_4 = 283$, $x_5 = 316$, $x_6 = 346$, $x_7 = 374$, $x_8 = 400$ cm sind.

V. Abschnitt.

Eigenspannungen des armierten Betons infolge Volumsveränderung beim Erhärten und bei Temperatur-Differenzen.

a) Symmetrisch armierte Querschnitte.

82. Spannungen infolge relativer Verkürzung des Betons.

Wenn der Beton an der Luft erhärtet, tritt eine Volumsverminderung ein, da sich der Beton um ein beträchtliches Maß zusammenzieht. Die lineare Verkürzung sei v. Ist der Beton armiert, so widersteht das Eisen der Längenänderung, indem es durch den sich zusammenziehenden Beton gedrückt, dieser hingegen gezogen wird. Die Zugkräfte im Beton und die Druckkräfte im Eisen sind 1. einander gleich, da eine resultierende Normalkraft wegen Fehlens von äußeren Kräften nicht entstehen kann und 2. ist die Verkürzung e des Eisens infolge der Druckkraft vermehrt um die Dehnung b des Betons infolge des Zuges gleich der Verkürzung des Betons infolge seiner Zusammenziehung beim Erhärten.

Ist AB (Fig. 56) der Begrenzungsquerschnitt bei der Herstellung des Betonkörpers, so würde sich derselbe, wenn eine Eiseneinlage nicht vorhanden wäre, auf den Querschnitt CD, also um v, verkürzen. Die Eiseneinlage vermindert die Verkürzung, sie dehnt den Stab wieder um b aus und es entsteht eine mittlere Lage EF.

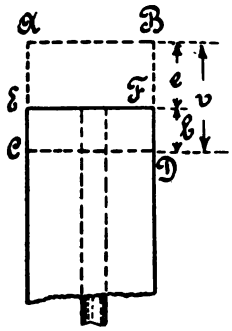


Fig. 56.

Die Kraft in Eisen beträgt

$$P_1 = \mu \cdot f \cdot \sigma_e;$$

μ bedeutet den Anteil des Eisens an den Gesamtquerschnitt f, σ_e ist die Eisenspannung.

Die im Beton auftretende Gesamtspannung ist

$$P_2 = (1 - \mu) f \cdot \sigma_b,$$

worin σ_b die Betonspannung pro cm² ist.

Da $P_1 = P_2$ sein muß, so ist

$$\mu \cdot f \cdot \sigma_e = (1 - \mu) f \cdot \sigma_b \text{ oder}$$

$$\mu \cdot \sigma_e = (1 - \mu) \cdot \sigma_b \qquad (1.)$$

Ferner muß

$$e + b = v \qquad (2.)$$

Die rechnerische Ermittlung der Beton- und Eisenspannungen, sowie der bezüglichen Längenänderungen ist ziemlich umständlich, wenn auch ohne prinzipielle Schwierigkeiten. Sehr einfach hingegen ist die graphische Methode, die allerdings nur eine versuchsweise Lösung zuläßt.

Wir tragen die Betonzugkurve BOB' für $1 - \mu$, sowie die Eisenlinie EOS für μ auf und zeichnen die zugehörige Verdrehungslinie, d. h. die Linie der Längenänderungen OV oder OV_1 ein (Fig. 57). Wir nehmen eine Eisenspannung $AC = \mu\sigma_e$ an, ziehen durch C eine

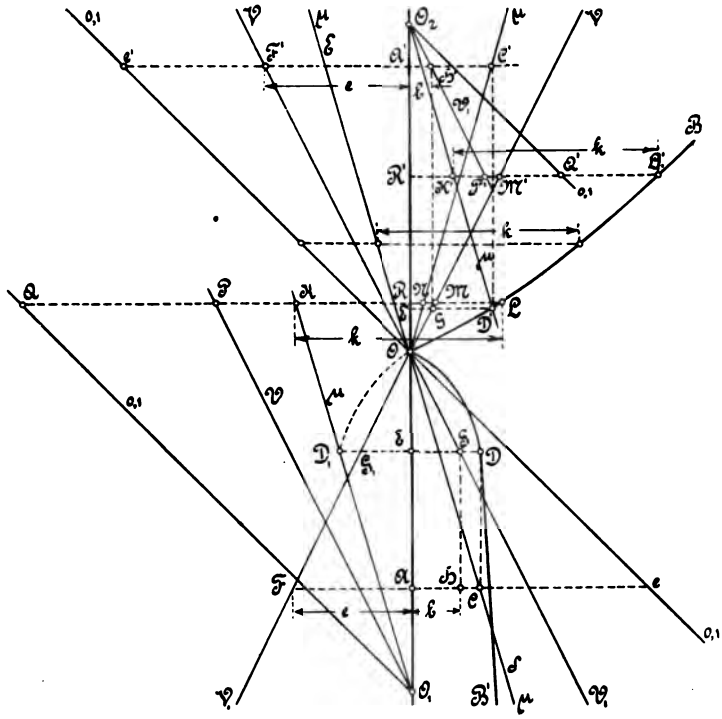


Fig. 57.

Senkrechte, in deren Schnittpunkt mit OB' wir $ED = (1 - \mu) \cdot \sigma_b$ erhalten. Es ist also $\mu\sigma_e = (1 - \mu)\,\sigma_b$. Der Spannung σ_e entspricht eine Verkürzung $AF = e$, der Spannung σ_b eine Dehnung $EG = EG_1 = b$.

Nun soll $e + b = v$ der bekannten oder gegebenen Verkürzung des Betons sein. Durch 2 bis 3 Versuche wird $FH = v$ gemacht werden können, dem aus der Figur abgreifbare Werte der Spannungen und Verkürzungen des Verbundkörpers entsprechen.

83. Spannungen infolge relativer Verlängerung des Betons.

Erleidet der Beton beim Erhärten (unter Wasser) eine Ausdehnung, dann treten im Beton Druck-, im Eisen Zugkräfte auf, deren Größen genau wie bei der Volumsverminderung gefunden werden können, falls die lineare spezifische Ausdehnung des nicht armierten Betons bekannt ist. (Fig. 57.)

Aus der $1 - \mu$fachen Betondruckkurve OB und der μfachen Eisenzuglinie OE ergeben sich wieder die zusammengehörigen Betonverkürzungen b und Eisenverlängerungen e. Dann soll

$$b + e = v$$

der linearen Verlängerung des Betons pro Längeneinheit sein.

84. Spannungen durch Temperaturänderungen.

Im Wesen dieselben Einflüsse wie die Verkürzung und Verlängerung des Betons beim Erhärten üben die unterschiedlichen Längenänderungen der Verbundstoffe infolge Temperaturwechsel gegenüber der Bautemperatur aus.

Nach den üblichen Angaben ist die Wärmedehnungsziffer des Betons $\alpha_b = 0{,}001\,370$, des Eisens $\alpha_e = 0{,}001\,235$. Es ergibt sich daraus eine differierende Ausdehnung des Betons von

$$v_t = 0{,}000\,135 \text{ für } 100° \text{ C.}$$

Da sich Beton sonach rascher ausdehnt, wird derselbe bei Wärmeerhöhung durch das langsamer folgende Eisen gedrückt, und dieses selbst daher gezogen. Die Spannungen für eine gegebene Temperaturdifferenz sind daher nach denselben Grundsätzen zu finden wie für die Verkürzungen und Verlängerungen des Betons (Abs. 82 und 83) so zwar, daß jenen eine Temperaturabnahme, diesen eine Temperaturzunahme entspricht. Ist die Temperaturdifferenz $t°$, so beträgt die relative Veränderung der Betonlänge pro Längeneinheit

$$v_t = 0{,}000\,001\,35 \cdot t.$$

Da Druckspannungen im Beton eher als günstig bezeichnet werden können, so ist es erklärlich, daß Temperaturerhöhungen einen nützlichen, Temperaturerniedrigungen dagegen wegen der entstehenden Zugspannungen einen schädlichen Einfluß ausüben.

Ist z. B. die Verkürzung des Betons infolge Erhärtens an der Luft $v = 0{,}0004$ (nach französischen Forschern), seine differenzielle Ausdehnung bei $t°$ C. $v_t = t \cdot 0{,}000\,001\,35$, so würde die Längenänderung verschwinden, wenn

$$t \cdot 0{,}000\,001\,35 = 0{,}0004,$$

$$\text{also } t = \frac{0{,}0004}{0{,}000\,001\,35} = 300° \text{ C.}$$

Bei 300° C. Temperaturerhöhung würde demnach im unbelasteten Verbundkörper ein spannungsloser Zustand eintreten. Bei weiterer Erwärmung würden dann im Beton Druckspannungen, im Eisen Zugspannungen entstehen. Dieses Verhalten erscheint für die Feuersicherheit der Betoneisenkonstruktionen von großer Wichtigkeit, da die Gefahr der Lösung des Zusammenhanges der beiden Stoffe oder überhaupt bedenkliche Eigenspannungen infolge der Erwärmung erst bei hohen Brandtemperaturen zu befürchten sind. Es dürfte vielmehr die Festigkeit des Eisens an sich durch eine länger anhaltende hohe Temperatur erschöpft und dadurch der Einsturz einer armierten Betonkonstruktion hervorgerufen werden können.

Besonders ungünstig wirken Temperaturerniedrigungen ein, da sie sich mit dem Einfluß der Volumsverminderung beim Erhärten an der Luft summieren. Denken wir uns eine Wärmeabnahme um $+ 25 - (- 35) = 60°$ C., so entspricht dieser Veränderung ein unterschiedlicher Koeffizient von

$$v_t = 60 \cdot 0{,}000\,001\,35 = 0{,}000\,081.$$

Die Schwindziffer des Betons wie oben mit $v = 0{,}000\,4$ angenommen, ergibt eine relative Verkürzung des Betons von $v' = v + v_t = 0{,}000\,048$, auf Grund deren die Eigenspannungen gefunden werden.

Aus dieser Betrachtung folgt, daß die Gefahr der Rißbildung im Beton bei tiefen Temperaturen am bedeutendsten ist, was mit der Erfahrung übereinstimmt. Hierzu tritt noch der Umstand, daß die Stoffe in der Kälte sehr spröde werden, an Elastizität verlieren und daher Erschütterungen gegenüber weniger widerstandsfähig sind.

85. Beispiel.

In Fig. 57 sind die Eigenspannungen der im Abs. 73 Beispiel 1 berechneten Betoneisensäule ermittelt und zwar für eine Betonverkürzung $v = 0{,}000\,4$ infolge Schwindens und für eine Betonverlängerung $v = 0{,}000\,4$ infolge Volumsvermehrung. Betonkurve 10 (T.-Fig. 1).

Für den ersten Fall ist eine Betonzugspannung $\sigma_z = 16{,}5$ und eine Betondehnung $b = 0{,}000\,116$, eine Eisendruckspannung $\sigma_e = 570 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und eine Eisenverkürzung $e = 0{,}000\,284$ gefunden; bei der Volumsvermehrung entstehen die Spannungen $\sigma_d = 20$ (Druck) und $\sigma_e = 690 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (Zug), sowie die Längenänderungen $b = 0{,}000\,055$ und $e = 0{,}000\,345$.

In beiden Fällen ist $b + e = v$ der gegebenen linearen Volumsveränderung des Betons.

Die ohne Berücksichtigung der Eigenspannungen entstehenden Druckspannungen durch die aufgebrachte Last ergeben sich aus der Fig. 57

mit $\sigma_b = 42$ und $\sigma_e = 260 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (gegen 42,2 und 258 mittels der Formeln (3.) und (4.) im Abs. 73).

Hieraus ist deutlich der große Einfluß der Eigenspannungen ersichtlich, die im vorliegenden Beispiel für das Eisen die doppelte Größe der Spannungen infolge der aufgebrachten Last überschreiten.

Des weiteren ist aus der Figur zu erkennen, daß die Eigenspannungen des Betons wachsen und jene des Eisens sinken, wenn der Eisengehalt des Querschnitts größer wird.

86. Spannungen in einer Säule mit Berücksichtigung der Eigenspannungen.

Durch die Verkürzung des Betons entstehen die Eigenspannungen $\sigma_s = ED = ED_1$ (Fig. 57) und $\mu\sigma_e = AC = ED = ED_1$. Wirkt nun eine Druckkraft auf den Querschnitt ein, so ist der Punkt D_1 der Ausgangspunkt für die infolge der äußeren Kraft entstehenden Spannungen. Die Druckkurve des Betons ist $D_1 OB$, die Spannungslinie des Eisens ist $D_1 K \parallel ES$; der Nullpunkt liegt in O_1, die dazu gehörige Verdrehungslinie ist $O_1 P$, die Linie der 10fach verkürzten Eisenlinie (für $\mu = 0{,}1$) ist $O_1 Q$.

Wird die ideelle Druckspannung $k = \frac{P}{f}$ zwischen der Eisen- und Betonspannungslinie eingetragen, so erhält man $KL = k$. Es ist dann

$RL = \sigma_d$

$RK = \mu \cdot \sigma_e$, daher $RQ = 0{,}1\,\sigma_e$.

Die Verkürzungen sind $RM = b$ Betonverkürzung und

$RP = e$ Eisenverkürzung.

Wenn infolge der Verlängerung des Betons die Eigenspannungen $\sigma_d = E'D'$ (Fig. 57) und $\mu\sigma_e = A'C'$ vorhanden sind, so ist bei der Entstehung neuer Spannungen infolge der aufgebrachten Last der Punkt D' der Ausgangspunkt der Spannungslinien. $D'B$ ist die Betonkurve, $D'O_2$ die Eisenspannungslinie für μ. Die dazu gehörige Verdrehungslinie ist $O_2 V_1$ und die Eisenlinie für $\mu = 0{,}1$ $O_2 Q'$. Wird wieder zwischen der Betonkurve und der Eisenspannungslinie μ die ideelle Druckspannung des Querschnitts $k = \frac{P}{f}$ eingetragen, so ist $K'L' = k$, sodann

$R'L' = \sigma_d'$

$R'K' = \mu\sigma_e'$, daher $R'Q' = 0{,}1 \cdot \sigma_e$.

Die Verkürzungen sind $R'M' = b'$ Betonverkürzung und

$R'P' = e'$ Eisenverkürzung.

Hiernach ergeben sich die Spannungen der im Abs. 73, Beispiel 1, und Abs. 85 berechneten Säule mit Berücksichtigung der Eigenspan-

nungen unmittelbar aus Fig. 57. Dieselben sind in der folgenden Tabelle für eine Betonverkürzung und Betonverlängerung $v = 40 \cdot 10^{-5}$ zusammengestellt. Drücke und Verkürzungen haben das — Zeichen. v, b und e sind in 10^{-5} ausgedrückt.

Tabelle VIII.

		σ_b	σ_e	b	e
Betonverkürzung $v = -40$	Ohne Last	+ 16,5	— 570	+ 11,6	— 28,4
	Mit Last	— 22,1	— 940	— 7,0	— 47,0
	Differenz	— 38,6	— 370	— 18,6	— 18,6
Betonverlängerung $v = +40$	Ohne Last	— 20,0	+ 690	— 5,5	+ 34,5
	Mit Last	— 60,5	+ 360	— 22,0	+ 18,0
	Differenz	— 40,5	— 330	— 16,5	— 16,5

Die Spannungen des Betons steigen bis 60,5 $\frac{kg}{cm^2}$, die Eisenspannungen bis 940 $\frac{kg}{cm^2}$. Die Differenzen der Verkürzungen von Beton und Eisen bei Aufbringung der Last müssen gleich groß, die vom Beton und Eisen aufgenommenen unterschiedlichen Druckkräfte zusammen gleich der äußern Last sein. Die graphische Ermittlung ergibt natürlich kleine Ungenauigkeiten:

$$f_e \cdot \sigma_e + f_b \cdot \sigma_b = P$$
$$20{,}3 \cdot 370 + 706{,}9 \cdot 38{,}6 = 34797$$

anstatt 35000 kg.

87. Spannungen in einem symmetrisch armierten Balken mit Berücksichtigung der Eigenspannungen.

Infolge der Volumsverminderung des Betons (Schwinden und Temperaturabnahme) treten in demselben gleichmäßig verteilte Zug-, im Eisen Druckspannungen auf, deren Größen nach dem früheren Verfahren gefunden werden können (Fig. 58). Der Betonzug ist DE, der $\mu \cdot \sigma_e$fache Eisendruck CA, die bezüglichen Längenänderungen sind EG und AF. Der Punkt D ist nun der Ausgangspunkt für die durch Biegung entstehenden Spannungen. Die Kurve für die Betondruckzone ist DOB, jene für die Zugzone DB', die Querschnittslinie ist $Q_1 Q_1'$, gegen QQ' um ED verschoben, die Eisenspannungskurve für $\varkappa$ ist ES. $\varkappa$ hat die Bedeutung wie in Abs. 21.

Mit Hilfe dieser Linien sind die zusammengehörigen Flächen der zusätzlichen Spannungen genau so zu bestimmen, als wenn Eigenspannungen nicht vorhanden wären. Die wirklichen Spannungen des

Betons sind die horizontalen Abszissen von QQ' bis zur Betonkurve BOB'. Die vorhandenen Eisenspannungen ergeben sich als algebraische Summe der zusätzlichen und der Eigenspannungen. Zieht man daher durch den Anfangspunkt D der zusätzlichen Spannungsflächen die Eisenlinie E_1S_1 für $\varkappa = 0{,}1$ (der Betonspannungen gegenüber 10 fach verkürzt), und verschiebt man den Anfang der Eisenspannungen um die Eigenspannung des Eisens $\overline{CM} = \frac{0{,}1}{\mu} \cdot \overline{AC}$, so erhält man die vorhandenen Eisenspan-

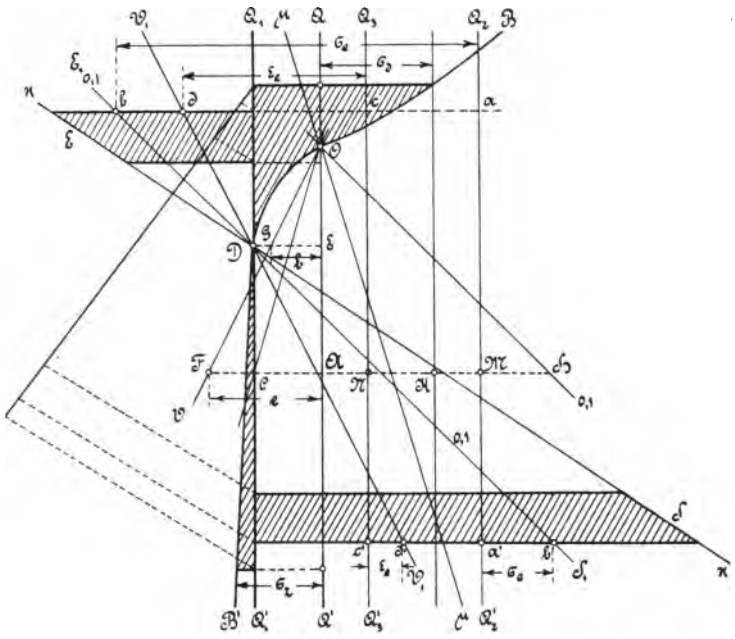


Fig. 58.

nungen als wagerechte Abstände der Linie E_1S_1 von Q_2Q_2'. Die Spannungen der entferntest liegenden Eisenschichten sind dann durch $\overline{ab}$ und $\overline{a'b'}$ ausgedrückt.

Desgleichen erhält man die vorhandenen Längenänderungen der Eiseneinlagen als algebraische Summe der Änderungen infolge der Eigen- und Zusatzspannungen. Wird durch D die Verdrehungslinie V_1V_1 und im Abstande $\overline{CN} = \overline{AF}$ die Linie $Q_3Q_3' \parallel QQ'$ gezeichnet, so bedeuten die wagerechten Entfernungen dieser beiden Geraden die wirklichen Dehnungen und Verkürzungen des Eisens. Dieselben betragen für die äußersten Eisenfasern $\overline{cd}$ und $\overline{c'd'}$.

Das Moment der so gefundenen Spannungen wird in der üblichen Weise mit Kraft und Seileck bestimmt.

In Fig. 58 ist die Betonkurve 10 aus T.-Fig. 1, sowie ein Querschnitt zu Grunde gelegt, dessen Eisengehalt $\mu = 0{,}03$ der Gesamtfläche oder $3\,\%$ ist; ferner ist der Abstand der Eiseneinlagen vom Rande mit $a = \frac{H}{10}$ und die Eisenhöhe ebenfalls mit $d = \frac{H}{10}$ angenommen, so daß $\varkappa = 0{,}15$.

Die relative Verkürzung durch Schwinden des Betons und durch Temperaturabnahme sei mit $v = 0{,}0004$ gegeben. Diesen Werten entspricht ein Betonzug $\overline{ED} = \sigma_z = 16{,}5\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, eine Betonverlängerung

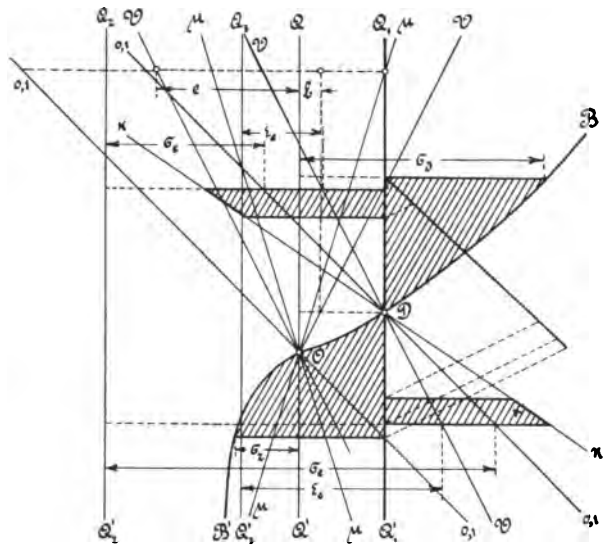


Fig. 59.

$b = 12 \cdot 10^{-5}$, eine Eisenpressung $\overline{AH} = \sigma_e = 560\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ und eine Eisenverkürzung $e = 28 \cdot 10^{-5}$.

Nun sind zu einer angenommenen Betonpressung $\sigma_d = 28\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ die Spannungsflächen für Beton und Eisen gezeichnet und schraffiert. Daraus ist die Betonzugspannung $\sigma_z = 21\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Die Gerade $Q_2 Q_2'$ hat von $Q_1 Q_1'$ einen Abstand $AH = CM = 560\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, die Gerade $Q_3 Q_3'$

einen Abstand $AF = CN = 28 \cdot 10^{-5}$. Die Randspannungen des Eisens sind demnach $ab = \sigma_e = -890 \frac{kg}{cm^2}$ und $a'b' = \sigma_e = +170 \frac{kg}{cm^2}$, die bezügliche Verkürzung und Verlängerung ist $-44{,}5 \cdot 10^{-5}$ und $+8{,}5 \cdot 10^{-5}$. Die maximalen Zusatzspannungen infolge des Biegungsmomentes sind aus der Figur für das Eisen — 330 (Druckzone) und $+730 \frac{kg}{cm^2}$ (Zugzone), für den Beton $-44{,}5$ und $+4{,}5 \frac{kg}{cm^2}$.

Das bei 10 cm Querschnittshöhe und 1 cm Querschnittsbreite sich ergebende Moment ist $M = 750$ cmkg. Diesem entspricht eine ideelle Biegungsspannung $k = 45 \frac{kg}{cm^2}$. Bei Außerachtlassung der Eigenspannungen entstünden die maximalen Betonpressungen von etwa 42, die größte Eisenspannung von etwa $260 \frac{kg}{cm^2}$. Daraus folgt, daß sich die Eisenspannungen bei Berücksichtigung der Eigenspannungen wesentlich, auf mehr als das dreifache, doch nicht über die zulässige Grenze hinaus, erhöhen, während die Betondrücke sich stark vermindern. Die Betonzugspannungen spielen eine ganz untergeordnete Rolle, wie ihre kleine Spannungsfläche beweist. Die Resultate würden sich nur geringfügig verändern, wenn man sie vernachlässigte. Die Gefährlichkeit sehr schwacher Armierungen tritt hier eklatant vor Augen.

Die Ermittelung der resultierenden Spannungen bei einer Volumsvermehrung des Betons ist in Fig. 59 gezeigt.

Unter denselben Armierungsverhältnissen und derselben relativen Betonverlängerung wie in Fig. 58 sind die Eigenspannungen des Betons $\sigma_b = -21$, des Eisens $+680 \frac{kg}{cm^2}$, die Längenänderungen $b = -4{,}5$, $e = +34{,}0 \cdot 10^{-5}$. Das Biegungsmoment M bringt die maximalen Zusatzspannungen $\sigma_b = -39$, $\sigma_e = -290$, bezw. $+280 \frac{kg}{cm^2}$ und $\sigma_z = +36{,}5$, sowie die zusätzlichen Längenänderungen $b = -17$, $e = 14{,}5$, bezw. $+14{,}0$ und $b' = +15 \cdot 10^{-5}$ hervor, so daß die wirklichen Spannungen $\sigma_b = -60$, $\sigma_e = +380$, bezw. $+960$ und $\sigma_z = +15{,}5 \frac{kg}{cm^2}$ und die wirklichen Längenänderungen $b = -21{,}5$, $e = +19{,}5$ bezw. $+48$ und $b' = +10{,}5 \cdot 10^{-5}$ betragen.

Ohne Berücksichtigung der Eigenspannungen entstünde durch dasselbe Moment $M = 935$ cmkg eine maximale Betonpressung von etwa 50, eine größte Eisenspannung von etwa $340 \frac{kg}{cm^2}$.

Die Ausmittelung der Spannungen für ein gegebenes Moment muß versuchsweise (Abs. 22) erfolgen.

b) Unsymmetrisch armierte Betonkörper.

Ist die Armierung bezüglich der Schwerlinie des Betonquerschnittes unsymmetrisch angeordnet, oder allgemein ausgedrückt, fällt der Schwerpunkt aller Eisenflächen mit dem Schwerpunkt des Querschnittes nicht zusammen, dann tritt nicht eine zentrische Beanspruchung des Betons und Eisens ein, sondern es findet eine Biegung des Balkens statt, analog der Wirkung einer exzentrischen Normalkraft.

88. Spannungen und Deformationen bei relativer Verkürzung des Betons.

Die exzentrische Zugkraft des Betons entsteht wie früher aus der Zusammendrückung des Eisens um e und der gleichzeitigen Dehnung des Betons an derselben Stelle um b. Es muß also wieder

$$e + b = v.$$

Ferner ist die Summe aller Druckkräfte D gleich der Summe aller Zugkräfte Z und auch die Summe der Momente M aller inneren Kräfte muß Null sein, weil weder Kräfte noch Momente den Stab von außen beeinflussen.

Aus diesen 3 Bedigungen

$$e + b = v \qquad (1.)$$
$$-D + Z = 0 \qquad (2.)$$
$$\Sigma M = 0 \qquad (3.)$$

lassen sich die Beton- und Eisenspannungen sowie die Längenänderungen ermitteln. Der rechnerische Weg ist außerordentlich umständlich (Haberkalt, Z. d. ö. Ing.- u. Arch.-V., 1903); seine schwierige Gangbarkeit beruht auf rein mathematischem Gebiete, da die Arbeit zur Auflösung mehrerer Gleichungen höheren Grades in keinem Verhältnis zur tatsächlichen Einfachheit des Problems steht. — Allerdings ist auch die graphische Ausmittelung der Spannungen ziemlich umständlich, da dieselbe versuchsweise durchgeführt werden muß. Der Weg hierzu wird im folgenden gezeigt (Fig. 60).

Man zeichnet die Betonspannungslinien BOB', die Eisenlinien EOS für $\varkappa$ und $E'OS'$ für 0,1 (10fach verkürzte Eisenspannungslinien), sowie die Verdrehungslinie VOV des Querschnitts. Durch horizontale Linien teilt man die Betonspannungsflächen in Abschnitte, in deren Schwerpunkten den Flächen proportionale Kräfte 1, 2, 3, . . . wirkend gedacht werden.

Mit diesen konstruiert man die Seillinie PQR. Im Kräfteplan stellen 0 — 3 die Druckkräfte des Betons, 3 — 13 die Zugkräfte, und daher 13 — 3 die Eisendruckkräfte vor. Im Schnittpunkt von Seilstrahl 0 und 13 greift die Eisenkraft an. Die Länge des Eisenkraftrechteckes $\overline{AC}$ ergibt sich aus der Beziehung, daß die Fläche des Rechteckes

$$f_3 = \overline{AC} \cdot u, \text{ wobei}$$

$$u = \frac{d}{H} \cdot \mathfrak{H} \cdot$$

Der Eisenspannungsfläche AC entspricht eine Eisenspannung $\varkappa\sigma_e = AC = ED$ und $0{,}1\ \sigma_e = EG$. Diese Spannung entsteht bei einer Verkürzung $e = EF$. Die Verkürzung des Betons an der Stelle der Eiseneinlage ist $b = AH$.

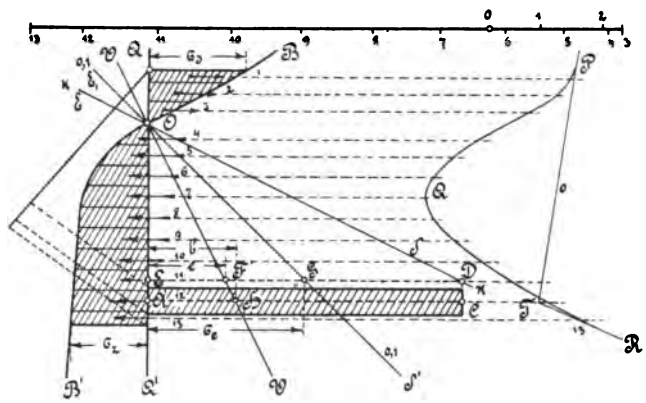


Fig. 60.

Wenn $b + e = v$, dann sind die Spannungsflächen gefunden; denn $-(OBQ) + (OB'Q') - (AC) = O$, d. h. die Summe aller Druck- und Zugkräfte ist Null und die Seillinie $PQRTP$ ist ein geschlossener Linienzug, d. h. die Momente sind Null.

Um diese 3 Bedingungen zu erfüllen, bedarf es mehrerer Versuche. Hat man mittels der Seillinie 3 zusammengehörige Spannungsflächen $-f_1$, $+f_2$ und $-f_3$ gefunden, so entspricht diesen eine bestimmte Betonverkürzung $b + e = v$. Ist v größer als das gegebene Maß, dann ist die Querschnittshöhe $\mathfrak{H}$ zu verkleinern.

Wenn nach diesem Verfahren die Eigenspannungen in einem Balken, dessen Armierung $2\,\%$ beträgt, also $\varkappa = 0{,}2$, und deren Lage durch die Maße $a = d = \frac{H}{10}$ gegeben ist, bestimmt werden, so erhält man für $v = 4 \cdot 10^{-4}$ eine Betonpressung $\sigma_d = 24$, einen Betonzug $\sigma_z = 18$, einen

Eisendruck $\sigma_e = 380 \frac{kg}{cm^2}$, sowie die Betonverlängerung an den Eiseneinlagen $b = 21$, die Eisenverkürzung $e = 19 \cdot 10^{-5}$. Die Nullinie liegt im Verhältnis $\frac{e_1}{e_2} = 0{,}27$. Die größte Betonzerrung beträgt $24 \cdot 10^{-5}$.

Die Folge der Spannungen bezw. der Verdrehung der Querschnitte ist eine gleichmäßige Biegung des Balkens nach der armierten Seite hin. Die Biegungslinie ist ein Kreisbogen vom Radius R.

Ist der Verdrehungswinkel zweier um 1 entfernten Querschnitte φ, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{24 \cdot 10^{-5}}{e_2}}{} = \frac{24 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}27}{H}$, worin H die Höhe des Querschnittes bedeutet.

$$R = 1 \cdot \cot\varphi = \frac{H}{24 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}27} = 3281 \cdot H.$$

Für $H = 10$ cm ist $R = 32\,810$ cm $= 328$ m.

Bei einer Balkenlänge $l = 4$ m ist die Ausbiegung desselben

$$\delta = 6 \text{ mm}.$$

89. Spannungen infolge relativer Verlängerung des Betons.

Der Beton erleidet durch das gezogene Eisen eine exzentrische Druckbeanspruchung. Seine Zusammendrückung an den Eiseneinlagen ist b, die Zerrung des Eisens ist e. Die Spannungsflächen haben wieder die Bedingungen zu erfüllen (Fig. 61):

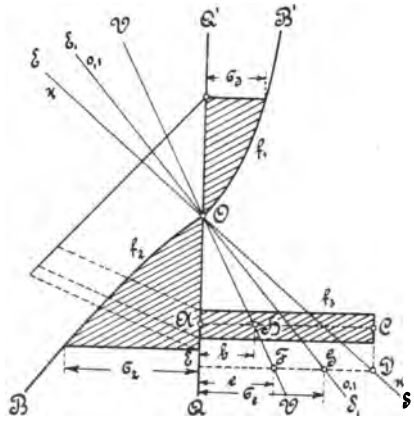


Fig. 61.

1. $+ f_1 - f_2 + f_3 = 0$,

2. Die Momente dieser Flächen zusammen gleich Null,

3. Die Eisendehnung $EF = e$ vermehrt um die Betonverkürzung $AH = b$ gibt die relative Betonverlängerung v.

Die entstehenden Spannungen sind σ_z, σ_b und σ_e.

Die Biegung des Balkens erfolgt nach der nicht armierten bezw. nach der schwächer armierten Seite hin.

90. Spannungen in einem unsymmetrisch armierten Balken mit Berücksichtigung der Eigenspannungen.

Die durch relative Betonverkürzung auftretenden Spannungsflächen eines rechteckigen Querschnittes seien $f_1 = OKM$, $f_2 = ONP$ und

$f_3 = AC$. (Fig. 62.) Durch ein äußeres Moment entstehen zu den Eigenspannungsflächen Zusatzflächen, deren statische Momente den Momenten der äußeren Kräfte gleich sein müssen. Sie haben daher die Bedingung zu erfüllen, daß die Summe der hinzugekommenen Flächen Null, bei Vorhandensein einer Normalkraft gleich dieser seien. Die Spannungen im Eisen wachsen hierbei vom Punkte A, der als Nullpunkt der Eisenspannungen betrachtet werden kann, nach der Linie AS_2 für $\varkappa$ und AS_3 für 0,1 (10fach verkürzte Eisenspannungen). Die zusätzlichen Eisendehnungen verlaufen nach der Geraden AV. Zusammengehörige Spannungsflächen sind also $KMBQ = f_1'$, $NPB'Q' = f_2'$ und

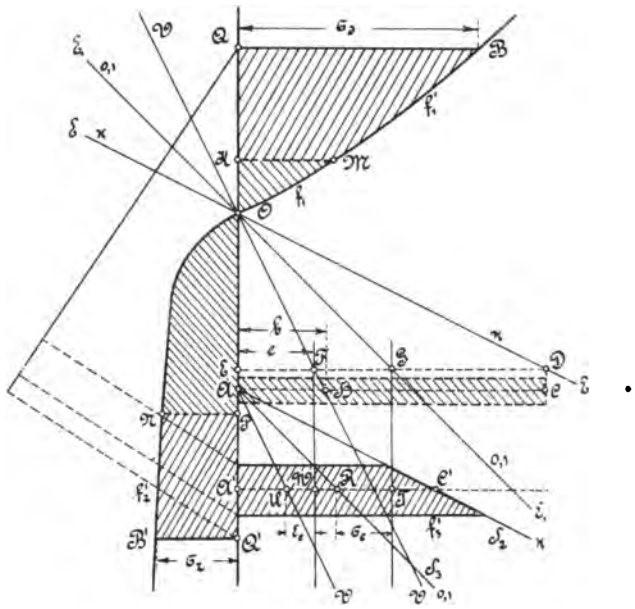


Fig. 62.

$A'C' = f_3'$. Die größte Betonpressung ist $QB = \sigma_d$, die maximale Betonzugspannung ist $Q'B' = \sigma_z$ und die zusätzliche mittlere Eisenspannung ist $A'C' = \varkappa\sigma_e$ oder $A'R = 0{,}1 \cdot \sigma_e$. Die vorhandene Eisenspannung ist demnach

$$0{,}1\,\sigma_e = -(EG) + (A'R) = -(RT).$$

Die zusätzliche Dehnung des Eisens beträgt $A'U$. Die wirkliche Dehnung ist $-(EF) + (A'U) = -(UW) = \varepsilon_e$.

Beispiel. Eine Betoneisendecke mit 2 % Eisenarmierung, deren Lage durch $a = d = \frac{H}{10}$ gegeben ist, soll bei einer Spannweite von 3 m

eine Nutzlast von 400 $\frac{kg}{m^2}$ tragen; die Dicke der Konstruktion beträgt 10 cm. Wie hoch werden die Beton und Eisenspannungen ohne und mit Berücksichtigung der Eigenspannungen infolge Schwindens des Betons um 0,00038 und einer Temperaturabnahme um 15° C.?

a) Ohne Eigenspannungen:

Das größte Biegungsmoment bei einer Eigenlast von etwa 725 kg beträgt auf 100 cm Breite:

$$M = \frac{1}{8} Ql = \frac{1}{8} (3 \cdot 400 + 725) \cdot 300 = 72200 \text{ cmkg}.$$

Hieraus rechnet sich die ideelle Biegungsspannung mit

$$k = \frac{M}{W} = \frac{72200}{\frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 10^2} = 43{,}3.$$

Diesem entsprechen ein Betondruck von etwa 43 $\frac{kg}{cm^2}$ und ein Eisenzug von etwa 250 $\frac{kg}{cm^2}$.

b) Mit Eigenspannungen:

Die relative Betonverkürzung ist

$$v = 0{,}00038 + 15 \cdot 0{,}000001\,35 = 0{,}00040.$$

Nach dem Verfahren im Abs. 88 gefundene Eigenspannungen sind

$$\sigma_d = -24, \quad \sigma_z = +18, \quad \sigma_e = -380 \frac{kg}{cm^2}.$$

Die für das gegebene Moment versuchsweise ermittelten Spannungsflächen ergeben die Spannungen im Beton $\sigma_d = -58$, $\sigma_z = +20 \frac{kg}{cm^2}$, die Zusatzspannung im Eisen $\sigma_e = +250$, daher die wirkliche Eisenspannung $-130 \frac{kg}{cm^2}$ (Druck).

Die Betondruckspannungen erhöhen sich also von 43 auf 58, die Eisenzugspannungen verkehren sich in Druckbeanspruchungen.

Wesentlich verändern sich die angegebenen Spannungen, falls die Betonzugzone wirkungslos würde (Risse). Die Eigenspannungen werden Null, und es entstehen aus den äußeren Momenten die Beanspruchungen:

$$\sigma_d = 48 \frac{kg}{cm^2} \text{ und } \sigma_e = 435 \frac{kg}{cm^2}.$$

Nach demselben Grundsatz wie für Betonverkürzungen wären die resultierenden Biegungsspannungen bei einer relativen Betonverlängerung zu finden.

91. Schlußbetrachtung.

Aus der Behandlung der Eigenspannungen ist zu ersehen, welch große Fehler man bei der Berechnung einer Beton-Eisenkonstruktion begehen kann, wenn diese Spannungen unberücksichtigt bleiben, Fehler, die bei weitem bedeutender sind als mangelhafte Annahmen der Elastizitätsverhältnisse oder der vermeintlichen zulässigen Beanspruchungen und als die Abweichungen der Ausführung vom Plan. Unter Umständen werden bei Vernachlässigung der Eigenspannungen die genauesten Methoden hinfällig und sinken zur Spielerei herab, da die wahrscheinliche Verteilung der inneren Kräfte oft ganz anders ist, als sie die zünftige Rechnung ergibt, so daß dort, wo diese Zugspannungen dekretiert, in der Tat Druckkräfte und umgekehrt, wirken können. Aus den durchgeführten Beispielen ist das Bedeutungsvolle der Eigenspannungen klar zu erkennen. Aber nicht bloß Volumsveränderungen beim Erhärten des Betons und Temperaturdifferenzen, sondern auch die verschiedenen Elastizitätsgrade der Verbundstoffe werden nicht unbeträchtliche Beanspruchungen hervorrufen (s. Abs. 14). Die experimentelle Erforschung all dieser Eigenschaften, die noch wenig beachtet werden, ist gewiß eine dankbare Aufgabe für die Materialprüfungsanstalten. Die Volumsveränderungen beim Erhärten hängen vielleicht von noch mehr Umständen ab, als die übrigen Eigenschaften des Betons, und die Berücksichtigung derselben in den einzelnen Berechnungsfällen wird natürlich um so schwieriger sein. Ihre Kenntnis ist aber notwendig zur vollständigen Aufklärung des Spiels der inneren Kräfte.

Nach den gegenwärtigen Kenntnissen, die wir vom Beton besitzen, wird daher eine angenäherte Berechnung notwendigerweise genügen müssen. Die Theorie ist ja nicht ihrer eigenen Schönheit willen da, sondern bloß ein unentbehrliches Rüstzeug in der Hand des Sachkundigen.

Anhang.

92. Äußerlich statisch unbestimmte Konstruktionen.

Die bekannten Lehrsätze und Methoden zur Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen basieren sämtlich auf der Proportionalität zwischen Kraft und Deformation und sind daher auf veränderlich elastische Stoffe, wie Beton, Stein, Gußeisen, armierten Beton, streng genommen nicht anwendbar.

Das Prinzip, wie bei solchen Konstruktionen die Veränderlichkeit der Elastizität berücksichtigt werden kann, soll an folgenden Beispielen erläutert werden.

Wir betrachten einen Bogen mit 2 Kämpfergelenken, der also einfach statisch unbestimmt ist. Die unbestimmte Größe sei der Horizontalschub $H = X$. Zu der gegebenen Belastung nehmen wir vorläufig einen Horizontalschub X_1 an, welcher nach Schätzung dem wirklichen Horizontalschub nahe kommt. Für X_1 werden die Momente M_1, die Normalkräfte N_1, die Spannungsflächen, die Spannungen σ_{d1}, σ_{z1}, σ_{e1} und aus diesen die Längenänderung $\Delta_1 l$ der Spannweite l des Gewölbes mit Hilfe der Biegungslinien (Abs. 67 u. f.) bestimmt. Desgleichen ermitteln wir für einen 2. und vielleicht 3. Horizontalschub die M, N, σ und die Veränderungen der Spannweite Δl. Die Größen X und Δl tragen wir zu einer Kurve auf (Fig. 63). Ändert sich die Spannweite tatsächlich um $\Delta' l$, so entspricht diesem der gesuchte Horizontalschub H, mit Hilfe dessen die Spannungen im Beton und Eisen im beliebigen Querschnitten unmittelbar ohne weitere Rechnung gefunden werden, sofern man die Beanspruchungen durch die Größen X_1, X_2 . . . ebenfalls durch Linien dargestellt hat.

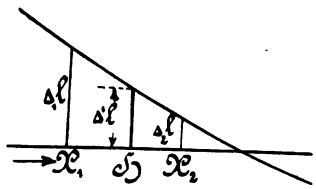


Fig. 63.

Sollen die Spannungen in einem Betoneisenbalken AB auf 3 Stützen ermittelt werden, so fassen wir den Auflagerdruck der Mittelstütze C als statisch unbestimmte Größe auf, an deren Stelle wir uns die Kräfte X_1, X_2 . . . vertikal nach aufwärts wirkend denken. Aus den Momenten M_1, M_2 . . ., bezw. deren Spannungsflächen, können die Biegungslinien des Balkens AB und somit die Senkungen δ_1, δ_2 . . . von C gefunden werden, woraus sich der wahre Auflagerdruck C, entsprechend der dort vorhandenen Senkung ergibt.

In ähnlicher Weise könnte man vorgehen, wenn die statisch unbestimmte Größe ein Biegungsmoment ist.

Sehr umständlich wird die Lösung bei mehrfach statisch unbestimmten Konstruktionen. Man wird dann in der Praxis einen mittleren Elastizitätskoeffizienten annehmen müssen und die Berechnung nach den üblichen Methoden durchführen. Diese werden dann mit genügendem Genauigkeitserfolg angewendet werden können, wenn vornehmlich Druckspannungen in Frage kommen, wie z. B. bei Gewölben.

VI. Abschnitt.

Tabellen und Vorschriften.

a) Tabelle zur Berechnung von armierten Steinbalken.

Grundlage: Zugelastizität des Steines $E_z = 0$, Verhältnis der Eisen- zur Steindruckelastizität $\alpha = \frac{E_e}{E_b} = 15$. Formeln und Anwendung der Tabelle s. Seite 54 u. f., Gleichungen (14.) bis (21.) und Seite 106 u. f.

Zweckmäßigste Materialausnützung bei Betoneisenbalken rechteckigen Querschnitts s. Seite 60 und 61, Gleichungen (22.), (25.), (26.), (30.) und (31.), sowie S. 94, Gleichungen (13.), (14.) u. (15.)

μ %	$k : \sigma_b$	$\sigma_e : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	$\sigma_e : k$	$\mathfrak{h} : \frac{Q}{h}$	$h : e_1$
0	0,0000	∞	∞	∞	1,000	∞
0,01	1571	266,5	6,368	1697	1,018	18,76
02	2180	186,3	4,587	854,6	1,026	13,42
03	2633	150,8	3,799	572,9	1,031	11,06
04	3004	129,6	3,330	431,6	1,036	9,642
05	3324	115,2	3,009	346,6	1,040	8,680
06	3606	104,6	2,773	290,1	1,044	7,971
07	3862	96,28	2,589	249,3	1,047	7,419
08	4097	89,63	2,441	218,8	1,050	6,975
09	4312	84,10	2,319	195,0	1,053	6,607
0,10	0,4514	79,44	2,215	176,0	1,056	6,296
11	4694	75,41	2,130	160,6	1,058	6,027
12	4867	71,92	2,055	147,8	1,061	5,795
13	5033	68,81	1,987	136,7	1,063	5,587
14	5193	66,08	1,926	127,3	1,066	5,405
15	5347	63,61	1,871	119.0	1,068	5,240
16	5495	61,37	1,820	111,7	1,070	5,092
17	5637	59,34	1,774	105,3	1,072	4,956
18	5774	57,49	1,732	99,57	1,074	4,833
19	5906	55,75	1,693	94,39	1,076	4,718
0,20	0,6034	54,20	1,657	89,81	1,078	4,613

μ %	$k : \sigma_b$	$\sigma_e : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	$\sigma_e : k$	$\eta : \frac{Q}{h}$	$h : e_1$
0,20	0,6034	54,20	1,657	89,81	1,078	4,613
21	6155	52,73	1,625	85,69	1,080	4,515
22	6273	51,37	1,594	81,88	1,082	4,425
23	6387	50,09	1,566	78,44	1,083	4,340
24	6497	48,90	1,539	75,26	1,085	4,260
25	6602	47,78	1,515	72,39	1,087	4,186
26	6704	46,73	1,492	69.72	1,089	4,115
27	6803	45,74	1,470	67,24	1,090	4,046
28	6899	44,80	1,449	64,91	1,091	3,986
29	6992	43,91	1,430	62,79	1,093	3,927
0,30	0,7083	43,06	1,412	60,80	1,094	3,871
31	7172	42,26	1,394	58,91	1,096	3,817
32	7258	41,50	1,378	57,19	1,097	3,766
33	7342	40,76	1,362	55,51	1,098	3,717
34	7425	40,06	1,347	53,96	1,100	3,671
35	7506	39,39	1,332	52,47	1,101	3,626
36	7586	38,76	1,319	51,12	1,102	3,581
37	7664	38,14	1,305	49,77	1,104	3,543
38	7742	37,56	1,292	48,52	1,105	3,504
39	7820	37,00	1,278	47,29	1,106	3,466
0,40	0,7897	36,45	1.266	46,15	1,108	3,430
41	7970	35,93	1,254	45,06	1,109	3,395
42	8042	35,42	1,243	44,03	1,110	3,361
43	8112	34,94	1,232	43,06	1,111	3,329
44	8181	34,47	1,222	42,12	1,112	3,297
45	8249	34,02	1,212	41,23	1,113	3,267
46	8315	33,58	1,202	40,37	1,115	3,238
47	8379	33,16	1,193	39.56	1,116	3,210
48	8442	32,74	1,184	38,79	1,117	3,182
49	8504	32,34	1,175	38,04	1,118	3,155
0,50	0,8564	31,95	1,168	37,31	1,119	3,130
51	8624	31,58	1,159	36,60	1,120	3,104
52	8683	31,21	1,151	35,92	1,121	3,089
53	8741	30,86	1,143	35,27	1,122	3,065
54	8799	30,51	1.135	34,64	1,123	3,042
55	8856	30,19	1,128	34,05	1,124	3,020
56	8912	29,87	1,121	33,47	1,125	2,998
57	8967	29,55	1,114	32.91	1,126	2,977
58	9022	29,24	1,107	32,38	1,127	2,957
59	9076	28,93	1,101	31,86	1,128	2,938
0,60	0,9130	28,64	1,095	31.37	1,129	2,910

μ %	$k : \sigma_b$	$\sigma_e : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	$\sigma_e : k$	$\eta : \frac{Q}{h}$	$h : e_1$
0,60	0,9130	28,64	1,095	31,37	1,129	2,910
61	9182	28,36	1,089	30 88	1,130	2,891
62	9233	28,08	1,083	30,41	1,131	2,873
63	9284	27,81	1,078	29,95	1,132	2,855
64	9334	27,54	1,072	29,51	1,133	2,837
65	9384	27,29	1,066	29,08	1,134	2,820
66	9433	27,04	1,061	28,66	1,135	2,803
67	9481	26,79	1.055	28,25	1,136	2,786
68	9529	26,55	1,050	27,86	1,137	2,770
69	9575	26,31	1,045	27.48	1,138	2,754
0,70	0,9621	26,08	1,040	27,11	1,139	2,739
71	9666	25,85	1,034	26,75	1,140	2,723
72	9711	25,63	1,029	26,40	1,140	2,708
73	9755	25,41	1,025	26,06	1,141	2,694
74	9799	25,20	1,020	25,73	1,142	2,680
75	9843	25,00	1,016	25,40	1,143	2,666
76	9986	24,80	1,011	25,08	1,144	2,653
77	9928	24.60	1,007	24,77	1,145	2,640
78	9971	24.40	1,003	24,47	1,145	2,627
79	1,0012	24,21	0,9999	24,18	1,146	2,614
0,80	1,005	24,02	0,9946	23,90	1,147	2,602
81	1,009	23,84	9906	23,62	1,148	2,589
82	1,014	23.66	9867	23,35	1,149	2,577
83	1,018	23,48	9829	23,08	1,149	2,565
84	1,021	23,31	9791	22,82	1,150	2,553
85	1,025	23,14	9754	22,57	1,151	2,541
86	1,029	22,97	9718	22,32	1,152	2,530
87	1,033	22,80	9682	22,08	1,152	2,519
88	1,037	22,64	9647	21,84	1,153	2,509
89	1,041	22,48	9612	21,61	1,154	2,498
0,90	1,044	22,33	0,9577	21,38	1,155	2,488
91	1,048	22,18	9543	21,16	1,155	2,478
92	1,051	22,03	9510	20.94	1,156	2,468
93	1,055	21,88	9477	20,73	1,157	2,458
94	1,058	21,73	9445	20.52	1,158	2,448
95	1,062	21,59	9413	20,32	1,158	2,438
96	1,065	21,45	9382	20,12	1,159	2,429
97	1,069	21,31	9352	19,91	1,160	2,420
98	1,072	21,17	9323	19.71	1,160	2,411
99	1,076	21,03	9295	19,53	1,161	2,402
1,00	1,079	20,90	0,9267	19,37	1,162	2,393

μ %	$k : \sigma_b$	$\sigma_e : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	$\sigma_e : k$	$\eta : \frac{Q}{h}$	$h : e_1$
1,00	1,079	20,90	0.9267	19,37	1,162	2,393
01	1,082	20.77	9240	19,19	1,163	2,384
02	1,085	20.64	9212	19,01	1,163	2,376
03	1,089	20,51	9185	18,84	1,164	2,368
04	1,092	20,39	9157	18,67	1,165	2,360
05	1,095	20,26	9130	18,50	1,165	2,352
06	1,098	20,14	9104	18,33	1,166	2,343
07	1,102	20,02	9078	18,17	1,167	2,335
08	1,105	19,90	9052	18,01	1,167	2,327
09	1,108	19,78	9027	17,86	1,168	2,319
1,10	1,111	19,67	0,9002	17,71	1,169	2,311
11	1,114	19,55	8978	17,56	1,169	2,303
12	1,117	19,44	8954	17,41	1,170	2,296
13	1,120	19,33	8930	17,26	1,170	2,289
14	1,123	19,22	8906	17,12	1,171	2,282
15	1,126	19,12	8883	16,98	1,172	2,275
16	1,129	19,01	8860	16,75	1,172	2,268
17	1,132	18,91	8840	16,62	1,173	2,261
18	1,135	18,80	8816	16,58	1,174	2,254
19	1,138	18,70	8794	16,45	1,174	2,247
1,20	1,140	18,60	0,8772	16,32	1,175	2,240
21	1,143	18,50	8751	16,19	1,175	2,234
22	1,146	18.40	8730	16,07	1,176	2,228
23	1,148	18,31	8709	15,94	1,177	2,222
24	1,151	18,21	8688	15,82	1,177	2,215
25	1,154	18,12	8668	15,70	1,178	2,209
26	1,157	18,03	8648	15,58	1,178	2,203
27	1,159	17,93	8628	15,47	1,179	2,197
28	1,162	17,84	8609	15,35	1,180	2,190
29	1,165	17,75	8589	15,24	1,180	2,184
1,30	1,167	17,66	0,8570	15,13	1,181	2,178
31	1,170	17,57	8552	15,03	1,181	2,172
32	1,172	17,49	8533	14,93	1,182	2,166
33	1,175	17,40	8514	14,82	1,182	2,160
34	1,177	17,32	8496	14,71	1,183	2,155
35	1,180	17,24	8478	14,61	1,183	2,149
36	1,182	17,15	8460	14,51	1,184	2,144
37	1,185	17,07	8443	14,41	1,185	2,138
38	1,187	16,99	8426	14,31	1,185	2,133
39	1,190	16,91	8409	14,22	1,186	2,127
1,40	1,192	16,83	0,8392	14,12	1,186	2,122

μ%	$k : \sigma_b$	$\sigma_e : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	$\sigma_e : k$	$\mathfrak{y} : \frac{Q}{h}$	$h : e_i$
1,40	1,192	16,83	0,8392	14,12	1,186	2,122
41	1,194	16,75	8375	14,03	1,187	2,117
42	1,197	16,68	8358	13,94	1,188	2,112
43	1,199	16,60	8342	13,85	1,188	2,107
44	1,202	16,52	8325	13,76	1,189	2,102
45	1,204	16,45	8309	13,67	1,189	2,097
46	1,206	16,37	8294	13,58	1,190	2,092
47	1,208	16,30	8278	13,49	1,191	2,087
48	1,211	16,23	8262	13,41	1,191	2,082
49	1,213	16,16	8247	13,32	1,192	2,077
1,50	1,215	16,09	0,8232	13,24	1,192	2,072
51	1,217	16,01	8217	13,16	1,192	2,068
52	1,219	15,94	8202	13,08	1,193	2,063
53	1,222	15,88	8187	13,00	1,193	2,058
54	1,224	15,81	8172	12,92	1,194	2,054
55	1,226	15,74	8158	12,84	1,194	2,050
56	1,228	15,67	8144	12,76	1,195	2,046
57	1,230	15,61	8130	12,69	1,195	2,041
58	1,233	15,54	8116	12,61	1,196	2,037
59	1,235	15,48	8102	12,54	1,196	2,032
1,60	1,237	15,41	0,8088	12,46	1,197	2,028
61	1,239	15,35	8074	12,39	1,197	2,023
62	1,241	15,29	8061	12,32	1,198	2,019
63	1,243	15,22	8047	12,25	1,198	2,015
64	1,245	15,16	8034	12,18	1,199	2,011
65	1,247	15,10	8021	12,11	1,199	2,007
66	1,249	15,04	8008	12,04	1,200	2,003
67	1,251	14,98	7996	11,97	1,200	1,999
68	1,253	14,92	7983	11,91	1,201	1,995
69	1,255	14,86	7970	11,84	1,201	1,991
1,70	1,257	14,80	0,7958	11,78	1,202	1,987
71	1,259	14,75	7946	11,71	1,202	1,983
72	1,261	14,69	7933	11,65	1,203	1,979
73	1,263	14,63	7921	11,59	1,203	1,975
74	1,265	14,57	7909	11,53	1,204	1,971
75	1,267	14,52	7897	11,47	1,204	1,967
76	1,268	14,46	7886	11,41	1,205	1,964
77	1,270	14,41	7874	11,35	1,205	1,960
78	1,272	14,35	7862	11,29	1,205	1,956
79	1,274	14,30	7851	11,23	1,206	1,953
1,80	1,276	14,25	0,7839	11,17	1,206	1,950

μ %	$k : \sigma_b$	$\sigma_e : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	$\sigma_e : k$	$\eta : \frac{Q}{h}$	$h : e_1$
1,80	1,276	14,25	0,7839	11,17	1,206	1,950
81	1,278	14,19	7828	11,11	1,207	1,946
82	1,280	14,14	7817	11,05	1,207	1,943
83	1,281	14,09	7806	11,00	1,208	1,939
84	1,283	14,04	7795	10,94	1,208	1,935
85	1,285	13,99	7785	10,89	1,209	1,931
86	1,287	13,93	7773	10,83	1,209	1,928
87	1,288	13,88	7763	10,78	1,209	1,925
88	1,290	13,83	7752	10,73	1,210	1,922
89	1,292	13,79	7742	10,67	1,210	1,919
1,90	1,293	13,74	0,7731	10,62	1,211	1,916
91	1,295	13,69	7721	10,57	1,211	1,912
92	1,296	13,64	7711	10,52	1,212	1,909
93	1,298	13,59	7700	10,47	1,212	1,906
94	1,300	13,54	7690	10,42	1,212	1,903
95	1,302	13,50	7680	10,37	1,213	1,900
96	1,303	13,45	7671	10,32	1,213	1,897
97	1,305	13,41	7661	10,27	1,214	1,894
98	1,307	13,36	7651	10,22	1,214	1,891
99	1,308	13,31	7641	10,17	1,214	1,888
2,00	1,310	13,27	0,7631	10,13	1,215	1,885
10	1,326	12,83	7538	9,671	1,219	1,855
20	1,342	12,43	7453	9,264	1,222	1,829
30	1,356	12,05	7374	8,886	1,226	1,804
40	1,369	11,70	7301	8,542	1,229	1,780
50	1,383	11,38	7232	8,230	1,233	1,758
60	1,395	11,07	7167	7,934	1,236	1,738
70	1,407	10,78	7107	7,661	1,240	1,718
80	1,419	10,50	7050	7,403	1,243	1,700
90	1,430	10,24	6995	7,163	1,247	1,683
3,00	1,440	10,00	0,6944	6,944	1,250	1,667
10	1,450	9,768	6896	6,784	1,253	1,651
20	1,460	9,548	6850	6,540	1,256	1,637
30	1,469	9,338	6807	6,355	1,258	1,623
40	1,478	9,139	6765	6,182	1,261	1,609
50	1,487	8,948	6726	6,018	1,264	1,597
60	1,495	8,767	6688	5,862	1,266	1,584
70	1,503	8,593	6653	5,716	1,269	1,572
80	1,511	8,425	6619	5,575	1,272	1,562
90	1,519	9,265	6586	5,443	1,274	1,552
4,00	1,526	8,113	0,6554	5,318	1,276	1,541

b) Tabelle zur Dimensionierung von Plattenbalken aus Eisenbeton bei zweckmäßigster Materialausnutzung.

Grundlage: $E_z = 0$, $\alpha = \frac{E_e}{E_b} = 15$, $\frac{\sigma_e}{\sigma_b} = 25$.

Formeln s. Seite 60 und 61, Gleichungen (22.), (23.), (24.), (28.) und (29.).

Wagrechte Schubkraft pro Längeneinheit angenähert

$$\mathfrak{h} = \frac{Q}{h\left(1 - \frac{s}{2}\right)}.$$

Berechnung anders armierter Plattenbalken s. Seite 52, Gleichungen (11.), (12.) und (13.) (für $h' < e_1$) und Tabelle a) (für $h' \leqq e_1$), Seite 125 u. f.

s	$\mu\,\% = \frac{100\,f_e}{f_B}$	$k:\sigma_b$	s	$\mu\,\% = \frac{100\,f_e}{f_B}$	$k:\sigma_b$	s	$\mu\,\% = \frac{100\,f_e}{f_B}$	$k:\sigma_b$
0,10	0,347	0,495	20	0,587	0,803	0,30	0,720	0,954
11	375	534	21	605	824	31	727	962
12	403	571	22	622	844	32	734	968
13	430	606	23	638	863	33	740	973
14	455	639	24	653	880	34	744	978
15	480	671	25	667	896	35	747	981
16	503	700	26	679	910	36	749	983
17	525	728	27	691	923	37	750	984
18	547	755	28	702	935	$^3/_8$	$^3/_4$	$^{63}/_{64}$
19	568	780	29	712	945			

Ist die Druckzone in der Nähe der Plattenmitte mit

$$\mu_1\,\% = \frac{100\,f_{e_1}}{f_B}$$

armiert, so erhöht sich die ideelle Biegungsspannung auf ungefähr

$$k' = \left(1 + \frac{\alpha \cdot \mu_1}{s}\right) \cdot k,$$

wobei auch die Zugarmierung auf

$$\mu' = \left(1 + \frac{\alpha \cdot \mu_1}{s}\right) \cdot \mu$$

zu verstärken ist.

c) Tabelle zur Berechnung von Eisenbeton-Säulen.

f Querschnitt der Säule.

f_e Querschnitt des eingelegten Eisens.

$\mu = 100 \frac{f_e}{f}$, $\alpha = \frac{E_e}{E_b} = 15$.

P Zentrische Belastung.

$k = \frac{P}{f}$, σ_b Betonpressung.

$\sigma_e = 15\ \sigma_b$ Eisenpressung. [s. Seite 98, Gleichung (5.)]

μ	$k : \sigma_b$	$\sigma_b : k$	μ	$k : \sigma_b$	$\sigma_b : k$
0,5	1,075	0,9302	2,3	1,345	0,7433
6	1,090	9174	4	1,360	7353
7	1,105	9050	5	1,375	7272
8	1,120	8929	6	1,390	7194
9	1,135	8810	7	1,405	7117
1,0	1,150	0,8696	8	1,420	7042
1	1,165	8583	9	1,435	6969
2	1,180	8475	3,0	1,450	0,6897
3	1,195	8368	1	1,465	6826
4	1,210	8265	2	1,480	6757
5	1,225	8163	3	1,495	6690
6	1,240	8065	4	1,510	6623
7	1,255	7968	5	1,525	6558
8	1,270	7874	6	1,540	6494
9	1,285	7782	7	1,555	6431
2,0	1,300	0,7692	8	1,570	6369
1	1,315	7604	9	1,585	6309
2	1,330	7519	4,0	1,600	6250

d) Auszug aus den Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten, erlassen vom Kgl. Preuß. Minister der öffentl. Arbeiten, 16. April 1904.

I. Allgemeine Vorschriften.

A. Prüfung.

§ 1.

1. Der Ausführung von Bauwerken oder Bauteilen aus Eisenbeton hat eine besondere baupolizeiliche Prüfung voranzugehen. Zu diesem Zwecke sind bei Nachsuchung der Bauerlaubnis für ein Bauwerk, welches ganz oder zum Teil aus Eisenbeton hergestellt werden soll, Zeichnungen, statische Berechnungen und Beschreibungen beizubringen, aus denen die Gesamtanordnung und alle wichtigen Einzelheiten zu ersehen sind.

Falls sich der Bauherr oder Unternehmer erst im Verlaufe der Bauausführung über die Wahl der Konstruktionsart schlüssig macht,

hat die Baupolizeibehörde darauf zu halten, daß die vorbezeichneten Unterlagen für die Prüfung nachträglich beigebracht werden.

2. In der Beschreibung ist der Ursprung und die Beschaffenheit der zum Beton zu verwendenden Baustoffe und ihr Mischungsverhältnis anzugeben.

3. Die Vorlagen sind von dem Bauherrn und dem Unternehmer, der die Ausführung bewirkt, zu unterschreiben.

§ 2.

1. Die Eigenschaften der zum Beton zu verwendenden Baustoffe sind erforderlichenfalls durch Zeugnisse einer amtlichen Prüfungsanstalt nachzuweisen. Diese Zeugnisse sollen im allgemeinen nicht älter als ein Jahr sein.

2. Es darf nur Portlandzement verwendet werden, der den preußischen Normen entspricht. Die Zeugnisse über die Beschaffenheit müssen Angaben über Raumbeständigkeit, Bindezeit, Mahlfeinheit, sowie über Zug- und Druckfestigkeit enthalten.

3. Zur Herstellung des Betons ist nur scharfer Sand, Kies oder ein sonstiger, erfahrungsgemäß geeigneter Zuschlag von zweckentsprechender Korngröße zu verwenden.

4. Die Druckfestigkeit, die der zu verwendende Beton in dem vorgesehenen Mischungsverhältnis nach 28 Tagen erreichen soll, ist in der Beschreibung (§ 1 Ziff. 1) anzugeben.

§ 3.

1. Das Verfahren der statischen Berechnung muß mindestens dieselbe Sicherheit gewähren, wie die Berechnung nach den Leitsätzen in Abschnitt II dieser Bestimmungen.

2. Bei noch unerprobter Bauweise kann die Baupolizeibehörde die Zulassung von dem Ausfalle zuvoriger Probeausführungen und Belastungsversuche abhängig machen.

B. Ausführung.

§ 4.

1. Die Baupolizeibehörde kann die Eigenschaften der in der Verarbeitung begriffenen Baustoffe durch eine amtliche Prüfungsanstalt oder in einer sonst ihr geeignet scheinenden Weise feststellen, sowie eine Festigkeitsprüfung des fertigen Betons vornehmen lassen. Die Prüfung der Festigkeit kann auch auf der Baustelle mittels einer Betonpresse, deren Zuverlässigkeit durch eine amtliche Prüfungsanstalt bescheinigt ist, erfolgen.

2. Die für die Prüfung bestimmten Betonkörper müssen Würfelform erhalten, und zwar je nach der Korngröße des Zuschlages mit 20 oder 30 cm Seite. Die Probekörper sind mit der Bezeichnung des Anfertigungstages zu versehen, durch ein Siegel zu kennzeichnen und bis zu ihrer Erhärtung nach Anweisung der Baupolizeibehörde aufzubewahren.

3. Der Zement ist in der Ursprungspackung abzuliefern.

§ 5.

1. Der Beton ist in der Regel nach Gewichtseinheiten zu mischen.

2. Die Zumessung beim Mischen kann aber auch mit Hohlmaßen und zwar mit je einem Hohlmaß für jeden Baustoff geschehen. Jedes dieser Hohlmaße soll vollgefüllt und glatt abgestrichen die dem vorgeschriebenen Mischungsverhältnis entsprechenden, durch eine zuverlässige Wage nachzuweisenden Gewichtseinheiten enthalten.

§ 6.

Der Beton ist nur in den Mengen zu bereiten, die für die unmittelbare Verwendung erforderlich sind. Er muß nach dem Mischen sofort eingebracht und gleichmäßig eingestampft werden, bei erdfeuchtem Zustande mindestens solange, bis sich an der Oberfläche Wasser zeigt. Zum Einstampfen sind passend geformte Stampfen von angemessenem Gewicht zu verwenden.

§ 7.

1. Mit besonderer Sorgfalt ist darauf zu achten, daß die Eiseneinlagen die richtige Lage erhalten und dicht mit Zementmörtel umkleidet werden.

2. Der Beton ist in einzelnen Schichten einzubringen, die nicht stärker als 15 cm sein dürfen und für sich gehörig eingestampft werden müssen.

3. Durchgehende Wände sind in ihrer ganzen Länge in Angriff zu nehmen und gleichmäßig hochzuführen. Dabei ist auf einen guten Verband mit anschließenden Querwänden Bedacht zu nehmen. Schichten, die den Abschluß eines Geschosses bilden, müssen wagerecht abgeglichen werden.

4. Die Schalungen müssen hinreichenden Widerstand gegen Durchbiegungen sowie gegen Erschütterungen beim Stampfen bieten und so angeordnet sein, daß sie unter Belassung der notwendigen Stützen gefahrlos entfernt werden können.

5. Beim Entfernen der Schalungen und Stützen muß jede Erschütterung vermieden werden.

§ 8.

1. Soll auf frische Betonschichten eine neue Schicht aufgebracht werden, so genügt es, die alte Oberfläche gut anzunässen.

2. Beim Weiterbau auf erhärtetem Beton muß die alte Oberfläche aufgerauht, sauber abgekehrt und angenäßt werden.

§ 9.

Bei der Herstellung von Wänden und Pfeilern in mehrgeschossigen Gebäuden darf mit der Ausführung dieser Bauteile in dem höheren Geschoß erst nach Abnahme des darunter liegenden Geschosses begonnen werden.

§ 10.

1. Bei Frostwetter darf nicht gearbeitet werden, sofern nicht schädliche Einwirkungen des Frostes ausgeschlossen sind.

2. Nach längeren Frostzeiten (§ 12) darf beim Eintritt milderer Witterung die Arbeit erst wieder aufgenommen werden, nachdem die Zustimmung der Baupolizeibehörde dazu eingeholt ist.

§ 11.

1. Bis zur genügenden Erhärtung des Betons sind die Bauteile gegen die Einwirkungen des Frostes und gegen vorzeitiges Austrocknen zu schützen, sowie vor Erschütterungen und Belastungen zu bewahren.

2. Die seitlichen Schalungen von Betonbalken und die Schalungen von Deckenplatten bis zu 1,50 m Spannweite dürfen frühestens nach 3 Tagen, die übrigen Schalungen und die Stützen frühestens nach 14 Tagen vom Schlusse des Einstampfens ab gerechnet entfernt werden.

3. Ist das Einstampfen erst kurze Zeit vor Eintritt von Frost beendet, so ist beim Entfernen der Schalung und der Stützen besondere Vorsicht zu beobachten.

4. Tritt während der Erhärtungsdauer Frost ein, so sind mit Rücksicht darauf, daß die Erhärtung des Betons durch den Frost verzögert wird, die in Absatz 2 genannten Fristen um die Dauer der Frostzeit zu verlängern.

§ 12.

Über den Gang der Arbeiten ist ein Tagebuch zu führen und auf der Baustelle stets zur Einsichtnahme bereit zu halten. Frosttage sind darin unter Angabe der Kältegrade und der Stunde ihrer Messung besonders zu vermerken.

C. Abnahme.

§ 13.

1. Bei der Abnahme müssen die Bauteile an verschiedenen von dem abnehmenden Beamten zu bestimmenden Stellen freiliegen, so daß die Art der Ausführung zu erkennen ist. Auch bleibt es vorbehalten, die einwandfreie Herstellung, den erreichten Erhärtungsgrad und die Tragfähigkeit durch besondere Versuche festzustellen.

2. Zur Feststellung des Erhärtungsgrades können Proben aus den fertigen Bauteilen zur Prüfung nach den Vorschriften des § 4 Ziff. 2 entnommen werden.

3. Werden Probebelastungen für nötig erachtet, so sind diese nach Angabe des abnehmenden Beamten vorzunehmen. Dem Bauherrn und dem Unternehmer ist rechtzeitig davon Kenntnis zu geben und die Beteiligung anheimzustellen.

4. Wird ein aus einem Deckenfelde herausgelöster Streifen einer Probebelastung unterworfen, so soll die gleichmäßig auf dem ganzen Streifen zu verteilende Auflast das Gewicht der Decke und der doppelten Nutzlast nicht überschreiten. Wird ein solcher Streifen ohne Loslösung aus dem Deckenfelde zur Probe belastet, so ist die Auflast um die Hälfte zu erhöhen. Demnach ist, wenn g das Eigengewicht und p die Nutzlast bezeichnet, die Auflast im ersten Falle $g + 2p$, im zweiten Falle $1{,}5\,g + 3p$.

II. Leitsätze für die statische Berechnung.

A. Eigengewicht.

1. Das Gewicht des Betons einschließlich der Eiseneinlagen ist zu 2400 kg für das Kubikmeter anzunehmen, sofern nicht ein anderes Gewicht nachgewiesen wird.

2. Bei Decken ist außer dem Gewicht der tragenden Bauteile das Gewicht der zur Bildung des Fußbodens dienenden Baustoffe nach bekannten Einheitssätzen zu ermitteln.

B. Ermittlung der äußeren Kräfte.

1. Bei den auf Biegung beanspruchten Bauteilen sind die Angriffsmomente und Auflagerkräfte je nach der Art der Belastung und Auflagerung den für frei aufliegende oder durchgehende Balken geltenden Regeln gemäß zu berechnen.

2. Bei frei aufliegenden Platten ist die Freilänge zuzüglich der Deckenstärke, bei durchgehenden Platten die Entfernung zwischen den Mitten der Stützen als Stützweite in die Berechnung einzuführen.

3. Bei Platten, die über mehrere Felder durchgehen, darf das Biegungsmoment in den Feldmitten zu vier Fünfteln des Wertes angenommen werden, der bei einer auf zwei Stützen frei aufliegenden Platte vorhanden sein würde, falls nicht die wirklich auftretenden Momente und Auflagerkräfte rechnerisch oder durch Versuche nachgewiesen werden.

4. Dieselbe Regel gilt auch für Balken, Plattenbalken und Unterzüge, jedoch mit der Ausnahme, daß ein Einspannungsmoment an den Enden nicht in Rechnung gestellt werden darf, wenn nicht besondere bauliche Anordnungen zur sicheren Einspannung getroffen werden. Als Stützweite gilt die um eine Auflagerlänge vergrößerte freie Spannweite.

5. Bei Plattenbalken darf die Breite des plattenförmigen Teiles mit nicht mehr als einem Drittel der Balkenlänge in Rechnung gestellt werden.

6. Bei Stützen ist auf die Möglichkeit einseitiger Belastung Rücksicht zu nehmen.

C. Ermittlung der inneren Kräfte.

1. Das Elastizitätsmaß des Eisens ist zu dem Fünfzehnfachen von dem des Betons anzunehmen, wenn nicht ein anderes Elastizitätsmaß nachgewiesen wird.

2. Die Spannungen im Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Körpers sind unter der Annahme zu berechnen, daß sich die Ausdehnungen wie die Abstände von der Nullinie verhalten und daß die Eiseneinlagen sämtliche Zugkräfte aufzunehmen vermögen.

3. Schubspannungen sind nachzuweisen, wenn Form und Ausbildung der Bauteile ihre Unschädlichkeit nicht ohne weiteres erkennen lassen. Sie müssen, wenn zu ihrer Aufnahme keine Mittel in der Anordnung der Bauteile selbst gegeben sind, durch entsprechend gestaltete Eiseneinlagen aufgenommen werden.

4. Die Eiseneinlagen sind möglichst so zu gestalten, daß die Verschiebung gegen den Beton schon durch ihre Form verhindert wird. Soweit dies nicht geschieht, ist die Haftspannung rechnerisch nachzuweisen.

5. Die Berechnung der Stützen auf Knicken soll erfolgen, wenn ihre Höhe mehr als das Achtzehnfache der kleinsten Querschnittsabmessung beträgt. Querverbände, welche geeignet sind, die eingelegten Eisenstäbe unveränderlich gegeneinander festzulegen, sind in Abständen von höchstens dem dreißigfachen Betrage des Eisenstabdurchmessers anzubringen.

6. Zur Berechnung der Stützen auf Knicken ist die Euler'sche Formel anzuwenden.

D. Zulässige Spannungen.

1. Bei den auf Biegung beanspruchten Bauteilen soll die Druckspannung des Betons den fünften Teil seiner Bruchfestigkeit, die Zug- und Druckspannung des Eisens den Betrag von 1200 kg/cm² nicht übersteigen.*)

Dabei sind folgende Belastungswerte anzunehmen:

a) bei mäßig erschütterten Bauteilen, z. B. bei Decken von Wohnhäusern, Geschäftsräumen, Warenhäusern: die wirklich vorhandene Eigen- und Nutzlast,

b) bei Bauteilen, die stärkeren Erschütterungen oder stark wechselnder Belastung ausgesetzt sind, wie z. b. bei Decken in Versammlungsräumen, Tanzsälen, Fabriken, Lagerhäusern: die wirkliche Eigenlast und die bis zu fünfzig vH. erhöhte Nutzlast,

c) bei Belastungen mit starken Stößen, wie z. B. bei Kellerdecken unter Durchfahrten und Höfen: die wirkliche Eigenlast und die bis zu hundert vH. erhöhte Nutzlast.

2. In Stützen darf der Beton mit nicht mehr als einem Zehntel seiner Bruchfestigkeit beansprucht werden. Bei Berechnung der Eiseneinlagen auf Knicken ist fünffache Sicherheit nachzuweisen.

3. Die Schubspannung des Betons darf das Maß von 4,5 kg/cm² nicht überschreiten. Wird größere Schubfestigkeit nachgewiesen, so darf die auftretende Spannung nicht über ein Fünftel dieser Festigkeit hinausgehen.

4. Die Haftspannung darf die zulässige Schubspannung nicht überschreiten.*)

III. Vorschriften für Decken und Treppen.

Die „Bestimmungen für die Ausführung von Konstruktionen aus Eisenbeton bei Hochbauten" finden auf ebene Decken aus Ziegelsteinen mit Eiseneinlagen sinngemäße Anwendung, sofern die statischen Verhältnisse, den Voraussetzungen entsprechen. Das Elastizitätsmaß des Mauerwerks kann dabei zum fünfundzwanzigsten Teile von dem des Eisens angenommen werden. Die bei der Biegung in der Ziegellage

*) Die vorläufigen Leitsätze des Betonschusses des V. d. A. u. I.-V. und des D. B.-V. schlagen bei 180—200 kg/cm² Betondruckfestigkeit die zulässige Spannung auf Druck bei Biegung mit 40, bei reinem Druck mit 35, bei höherer Betonfestigkeit bis 50 kg/cm², die zulässige Eisenspannung mit 1000 die zulässige Haftspannung mit 7,5 kg/cm² vor.

auftretende Druckspannung soll, die Verwendung von Zementmörtel vorausgesetzt, die nach den üblichen Annahmen für Mauerwerk je nach der Beschaffenheit der verwendeten Steine und der Zusammensetzung des Mörtels zulässigen Druckspannungen um nicht mehr als 50 vH. überschreiten, in keinem Falle aber mehr als 20 kg/cm² betragen. Decken, die beiderseits auf den unteren Flanschen eiserner Träger aufruhen und dicht an die Stege dieser Träger anschließen, dürfen als halb eingespannt angesehen, also nach der Formel $M = \frac{pl^2}{10}$ berechnet werden.

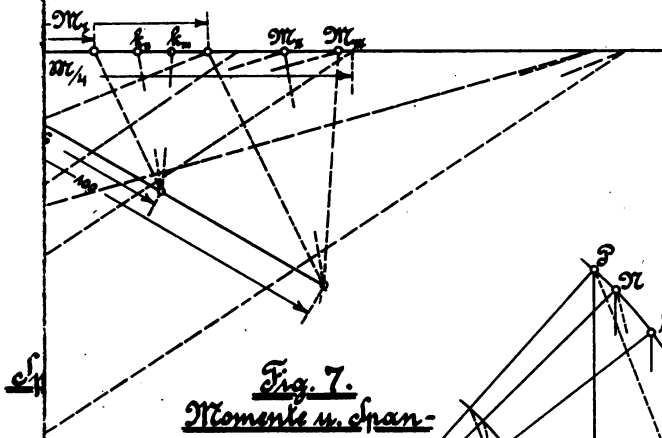
Wenn bei derartigen Decken die den Bestimmungen zugrunde liegenden statischen Voraussetzungen nicht erfüllt sind, wird die zulässige Spannweite ebenso, wie dies bislang schon vielfach geschehen ist, nach den Ergebnissen zuvoriger Probebelastungen festzustellen sein. Als Bruchlast ist dabei die Last anzusehen, welche der sogenannten Fließ- oder Streckgrenze entspricht.

Auf ebene Decken ohne Eiseneinlagen sind die Bestimmungen nicht anwendbar. Wenn solche Decken nicht als freiaufliegend angesehen werden müssen und wenn für die Aufnahme des Horizontalschubes gesorgt ist, können sie als scheitrechte Gewölbe berechnet werden, wobei hinsichtlich der Belastungsannahmen und der zulässigen Druckspannungen die für Beton- und Steindecken mit Eiseneinlagen getroffenen Bestimmungen maßgebend bleiben. Können derartige Decken nicht als scheitrechte Gewölbe gelten, so müssen auch bei ihnen die zulässigen Spannweiten durch Probebelastungen ermittelt werden.

Freitragende Treppen aus Eisenbeton oder aus Ziegelsteinen mit Eiseneinlagen werden sich zwar unter sinngemäßer Anwendung der Bestimmungen statisch berechnen lassen; da aber eine genaue Berechnung umständlich und schwierig ist, so wird in Zweifelfällen auch hier die Belastungsprobe zur Ermittlung der freitragenden Stufenlänge vorzuziehen sein.

Druck von Grimme & Trömel in Leipzig.

mente und Spannungen bei Weglassung
von - Zugspannungen. $M = m \cdot b \cdot h^2$, $k = \frac{\varepsilon}{100} \cdot E$.



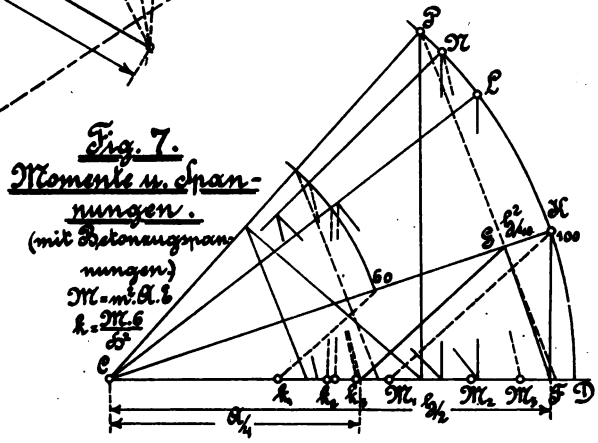
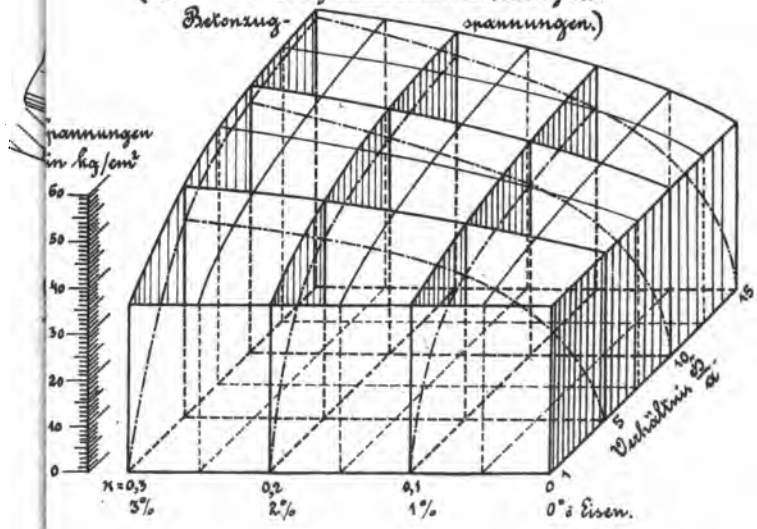
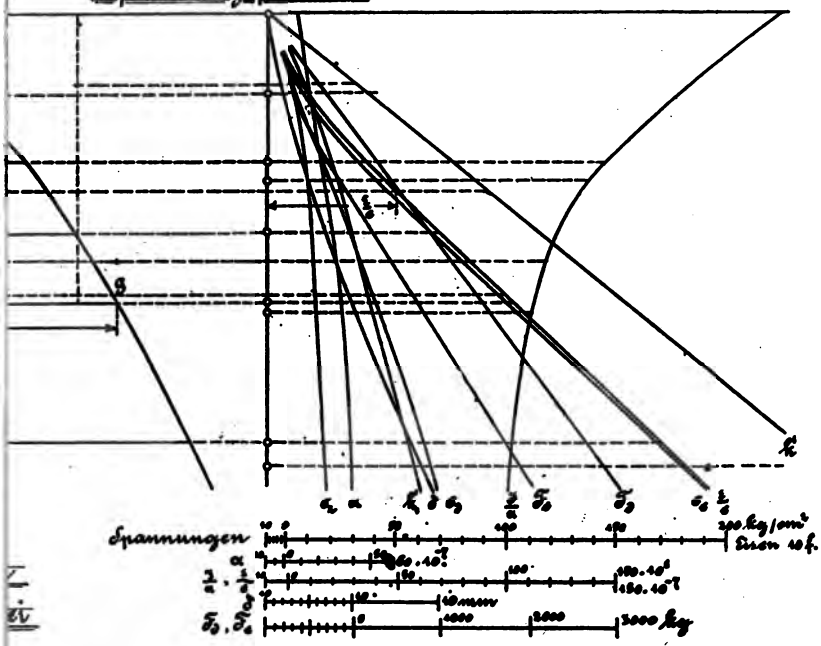


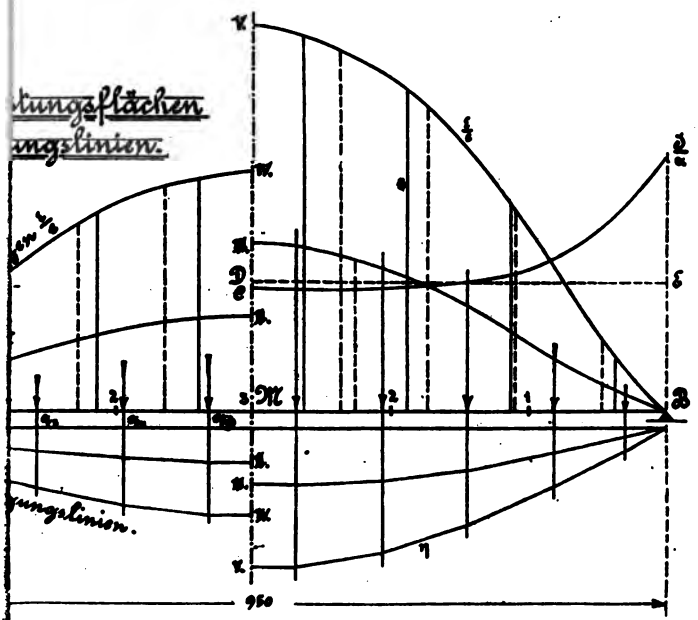
Fig. 7.
Momente u. Spannungen.
(mit Betonzugspannungen)
$M = m \cdot b \cdot h^2$
$k = \frac{M \cdot 6}{b \cdot h^2}$

Fig. 11. Ideelle Biegungsspannungen $k = \frac{M}{\frac{1}{2} b h^2}$ —
für $\sigma_3 = 50 \frac{kg}{cm^2}$, Eisenprozentsatz 0~3 u. $\frac{h_2}{h_1} = 1 \sim 15$.
(Die ——— Linien gelten bei vernachlässigten Betonzug- spannungen.)

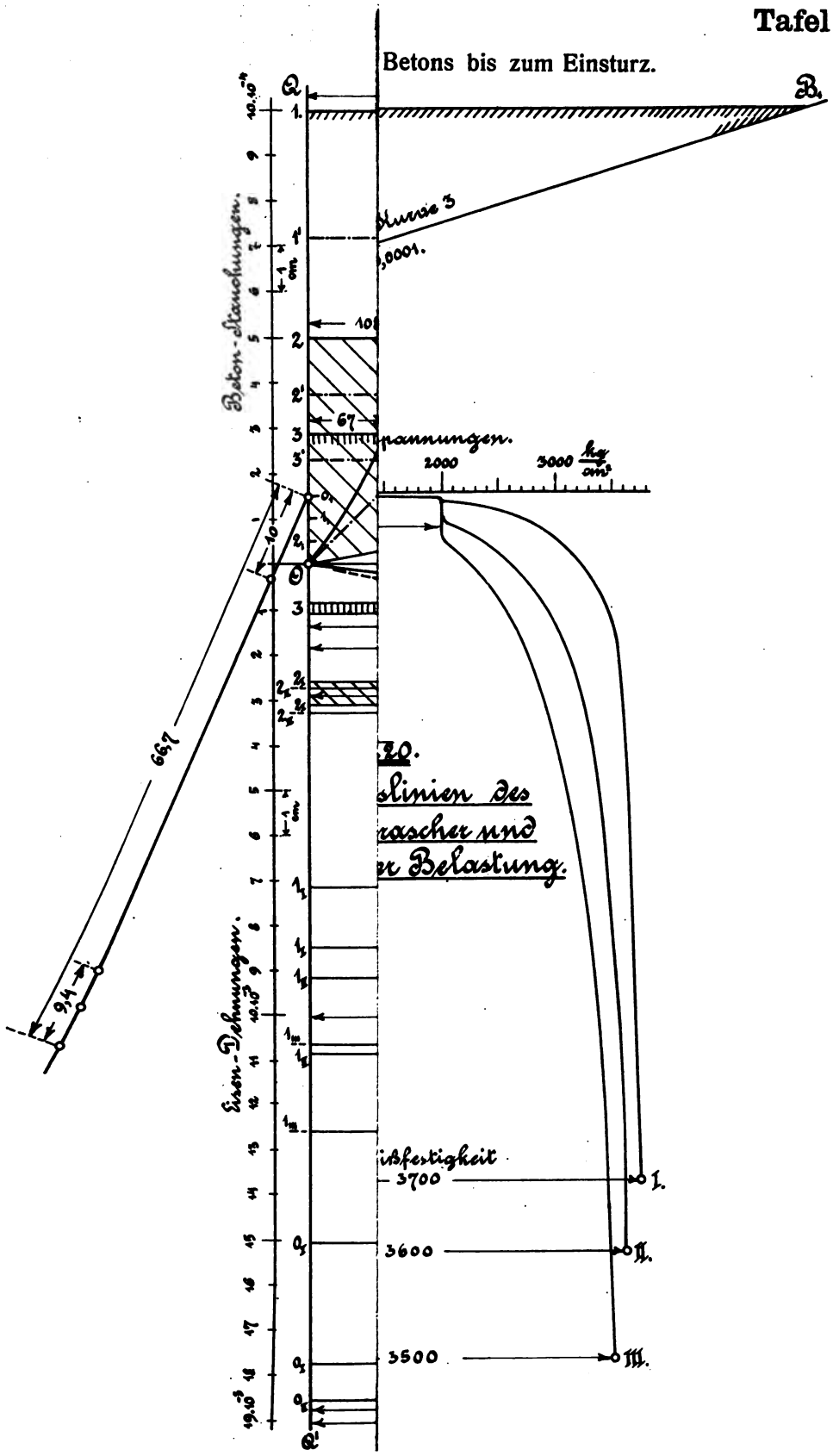


Spannungen, Elastizitätsziffern, Durchbiegungen und Spannungsflächen.





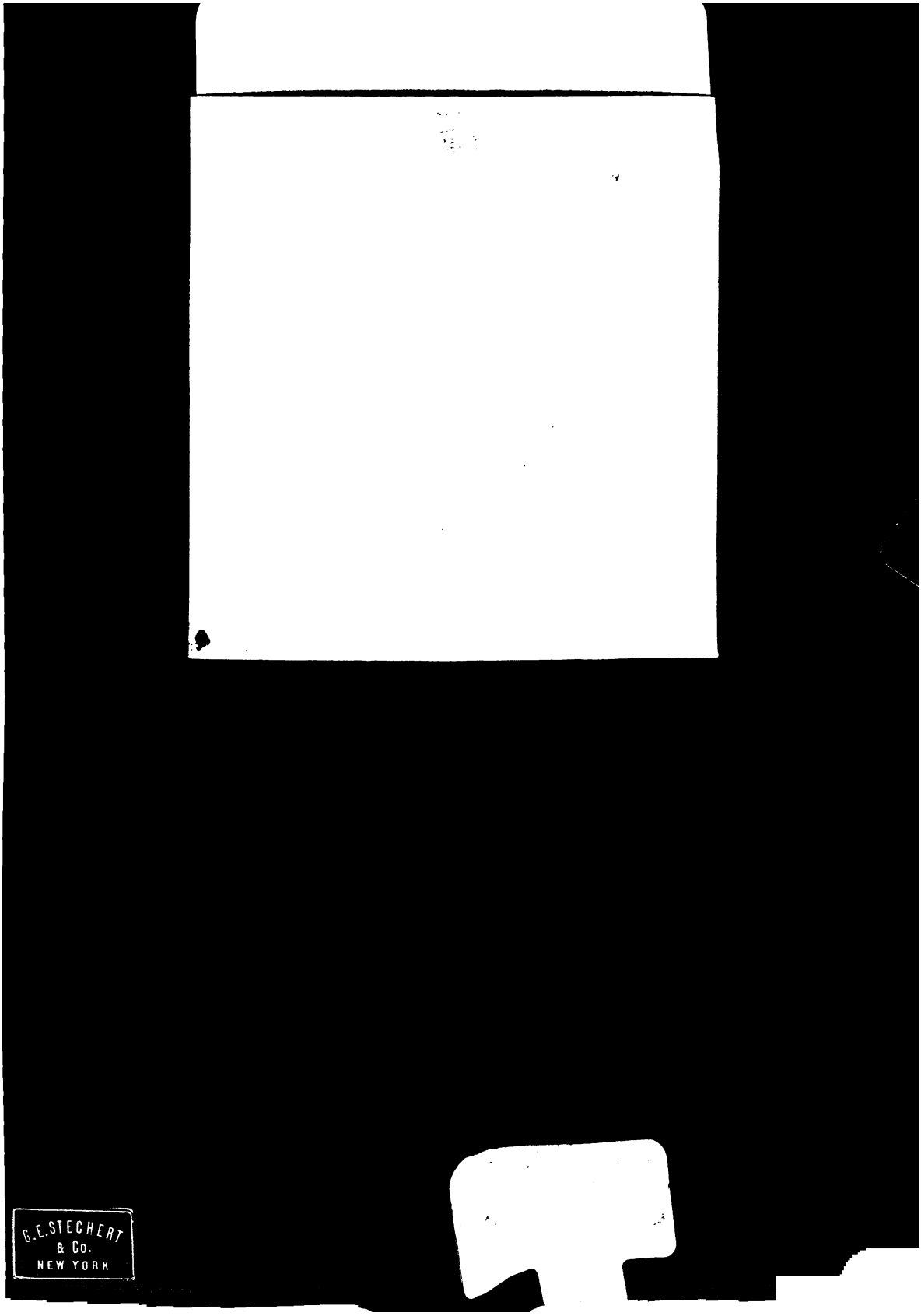
Tafel IV.



Betons bis zum Einsturz.
Q
B.
Beton-Stauchungen.
Eisen-Dehnungen.
2000
3000 kg/cm²
3700
3600
3500
I.
II.
III.
66,7
9,4

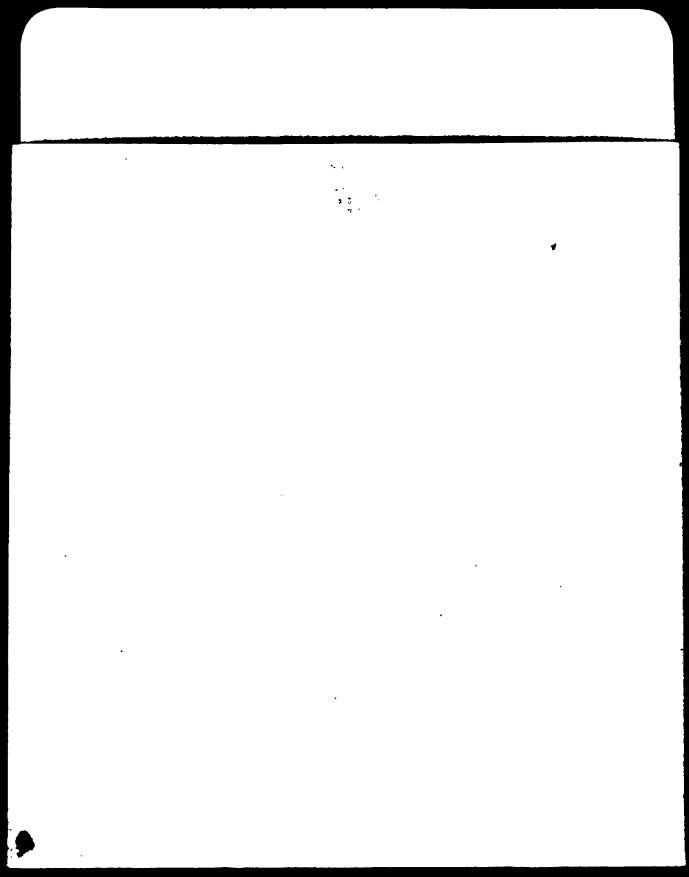
8908044806l

b89080448061a


G.E.STECHERT
& Co.
NEW YORK

89080448061

b89080448061a



G.E.STECHERT
& Co.
NEW YORK